

УДК 539.3

Г. Сулим¹, докт. фіз.-мат. наук; Я. Пастернак², канд. фіз.-мат. наук;
М. Томашівський¹

¹Львівський національний університет імені Івана Франка

²Луцький національний технічний університет

ГРАНИЧНОЕЛЕМЕНТНИЙ АНАЛІЗ АНІЗОТРОПНОГО ТЕРМОПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ З ТОНКИМИ ДЕФОРМІВНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

Резюме. За допомогою розширеного формалізму Стро й теорії функції комплексної змінної побудовано інтегральні рівняння типу Сомільяни плоскої задачі термопружності для анізотропного півпростору, що містить отвори, тріщини та тонкі жорсткі та деформівні включення. Ядра записаних інтегральних подань враховують усі можливі комбінації однорідних механічних і теплових крайових умов на межі півпростору. Отримані інтегральні рівняння введено у схему модифікованого методу граничних елементів. Здійснено числовий аналіз впливу межі півпростору на інтенсивність напружень в околі торців тонких неоднорідностей.

Ключові слова: анізотропний півпростір, термопружність, тонке включення, інтегральні рівняння, метод граничних елементів, тріщина.

H. Sulym, Ia. Pasternak, M. Tomashivskyy

BOUNDARY ELEMENT ANALYSIS OF ANISOTROPIC THERMOELASTIC HALF-SPACE CONTAINING THIN DEFORMABLE INCLUSIONS

Summary. The paper studies the influence of boundary effects on the stress intensity factors at the tips of thin inclusions in an anisotropic thermoelastic half-space. It utilizes the extended Stroh formalism, which allows writing the general solution of thermoelastic problems in terms of certain analytic functions. Applying the complex variable calculus, in particular, Cauchy integral formula and Sokhotski-Plemelj formula the Somigliana type identities and boundary integral equations are derived for a thermoelastic anisotropic half-space. For modeling of solids with thin inhomogeneities, a coupling principle for continua of different dimension and the method of averaging of the physical and mechanical parameters over the thickness of the inclusion are used. Derived dual integral equations along with the models of thin thermoelastic inclusions, which are written as certain functional dependences of discontinuity functions, allow solving problems of a plane thermoelasticity for anisotropic half-space with holes, cracks and thin inclusions.

The absence of the integrals over infinite path in the obtained integral relations allows to apply the boundary element method for solving of the derived integral equations of the plane problem of thermoelasticity for a half-space with thin deformable inhomogeneities. Despite the fact that the boundary conditions on the boundary of a half-space in general have both mechanical and thermal components (the surface of a half-space with zero displacements, traction-free half-space, the surface of half-space maintained at zero temperature or thermally insulated half-space), the paper presents the kernels of integral equations in a closed form for each of the four abovementioned boundary value problems.

All obtained integral equations are introduced into the modified boundary element method procedure. Based on the numerical calculations held the influence of boundary effects in the half-space on the stress intensity at the tips of the inclusion is studied.

Key words: anisotropic half-space, thermoelasticity, thin inclusion, integral equation, boundary element method, crack.

Вступ. Унаслідок високих параметрів механічних, теплофізичних та інших властивостей, композиційні матеріали набули широкого використання у сучасних високотехнологічних інженерних конструкціях. Інтелектуальні матеріали також мають структуру композитів. З огляду на їх штучне походження, структуру, склад, а відтак – і

властивості, такі матеріали можна наперед розрахунково оптимізувати і після цього реалізувати у готовому виробі. Скажімо, при цьому вдається істотно зменшити його масу при збереженні або за потреби й підвищенні міцності та жорсткості продукту. Усі композити є, загалом, анізотропними. Також зрозуміло, що будова більшості матеріалів є далекою від ідеальної: вони містять багато неоднорідностей у вигляді порожнин, тріщин, різноманітних, у тому числі й тонкостінних, включень. Як свідчить досвід, саме біля них унаслідок істотної концентрації напружень і теплових потоків починаються процеси руйнування. З другого боку, такі структурні неоднорідності матеріалу у конструкціях можуть вводитися зумисно для виконання певних функцій: підкріплень, заповнювачів порожнин і тріщин при відновлювальному ремонті, давачів вимірювальної апаратури тощо. Термомеханічні властивості, геометрія самих конструкцій та їхніх структурних елементів, кількість та спосіб просторового розподілу можуть бути практично довільними. Усе це зумовлює необхідність розвитку аналітичних і числових підходів до аналізу напружено-деформованого стану, а далі – й міцності та надійності анізотропних конструкційних елементів, які би мали якнайбільшу універсальність застосування. У цьому напрямі проводяться інтенсивні дослідження. Скажімо, у роботах [1,2,3] побудовано ефективні аналітично-числові методи аналізу термопружного стану анізотропних середовищ із неоднорідностями за допомогою розгляду відповідних комплексних потенціалів типу Мусхелішвілі та Лехніцького.

Серед численних підходів, що використовуються при розв'язанні відповідних задач, добре себе зарекомендували методи інтегральних рівнянь, зокрема й метод граничних елементів (МГЕ), який вирізняється високою точністю, мірою універсальності та продуктивністю [4,5]. Однак у задачах термопружності внаслідок впливу температури на напружено-деформований стан в інтегральних рівняннях виникають додаткові члени з об'ємними інтегралами щодо шуканих функцій, які зводять практично нанівець переваги МГЕ, у якому інтегрування в ідеалі мало б відбуватися по межі цих об'ємів. У разі ізотропних твердих тіл згадані об'ємні інтеграли можуть бути перетворені до граничних [6] доволі просто. Проте у випадку анізотропії перетворення об'ємного інтеграла до межового є складним завданням, яке знайшло своє принципове вирішення для необмеженого середовища лише нещодавно у роботі [7]. Дослідження цього питання також стосувалися роботи [8–11]. Вперше у випадку плоскої задачі анізотропної термопружності об'ємний температурний інтеграл був зведений до контурного в дійсній області в публікації [8].

У цій роботі розширено можливості заснованого на методах теорії функції комплексної змінної і формалізму Стро підходу [8,9,12] для отримання інтегральних залежностей, формул і рівнянь для анізотропного термопружного тіла з межею. Інтегральні рівняння виводяться для півпростору з отворами, тріщинами і тонкими деформівними включеннями з урахуванням різних можливих комбінацій крайових умов на його межі.

1. Основні співвідношення плоскої термопружності й розширений формалізм Стро. Розглянемо тіло, розташоване у нерухомій прямокутній системі координат $Ox_1x_2x_3$. Рівняння рівноваги та балансу тепла відповідно до [8,13,14] запишемо так:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad h_{i,j} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Конститутивні співвідношення плоскої деформації лінійно термопружного анізотропного тіла і плоскої стаціонарної теплопровідності в цьому випадку можна подати у компактному уніфікованому вигляді

$$\sigma_{ij} = C_{ijkm} \varepsilon_{km} - \beta_{ij} \theta, \quad h_i = -k_{ij} \theta_{,j}. \quad (2)$$

Тут $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ – тензор деформацій; σ_{ij} – компоненти тензора напружень; h_i – компоненти вектора густини теплового потоку; u_i – вектор переміщення; θ – зміна температури порівняно з відліковою; C_{ijkm} – пружні сталі; k_{ij} – коефіцієнти теплопровідності; $\beta_{ij} = C_{ijkm} \alpha_{km}$ ($i, j, k, m = 1, \dots, 3$) – модулі теплового розширення (коефіцієнти теплових напружень); α_{ij} – коефіцієнти теплового розширення. Тензори з компонентами C_{ijkm} , k_{ij} , α_{ij} , та β_{ij} є симетричними. У формулах прийняте правило Айнштайна підсумовування за індексом, що повторюється. Кома в індексних позначеннях відповідає диференціюванню за зазначеною після коми координатою, тобто, $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$.

Відповідно до розширеного формалізму Стро [13,14] загальний розв'язок рівняння (1), (2) запишемо так:

$$\begin{aligned} \theta &= 2 \operatorname{Re}\{g'(z_t)\}, \quad \mathcal{G} = 2k_t \operatorname{Im}\{g'(z_t)\}, \quad h_1 = -\mathcal{G}_{,2}, \quad h_2 = \mathcal{G}_{,1}, \quad k_t = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}; \\ \mathbf{u} &= 2 \operatorname{Re}[\mathbf{A}\mathbf{f}(z_*) + \mathbf{c}g(z_t)], \quad \boldsymbol{\varphi} = 2 \operatorname{Re}[\mathbf{B}\mathbf{f}(z_*) + \mathbf{d}g(z_t)], \quad \sigma_{i1} = -\varphi_{i,2}, \quad \sigma_{i2} = \varphi_{i,1}; \\ z_t &= x_1 + p_t x_2; \quad z_\alpha = x_1 + p_\alpha x_2; \quad \mathbf{f}(z_*) = [F_1(z_1), F_2(z_2), F_3(z_3)]^T, \end{aligned} \quad (3)$$

де \mathcal{G} – функція теплового потоку; $g(z_t)$, $F_\alpha(z_\alpha)$ – певні аналітичні функції; комплексна стала p_t є коренем (з додатною уявною частиною) характеристичного рівняння теплопровідності $k_{22}p_t^2 + 2k_{12}p_t + k_{11} = 0$. Матриці \mathbf{A} і \mathbf{B} , вектори \mathbf{c} і \mathbf{d} , сталі p_α ($\alpha = 1, 2, 3$) визначаються із задачі на власні значення формалізму Стро [13, 14].

Комплексні потенціали Стро та вектор-функції переміщень і напружень зв'язані такими співвідношеннями [8]:

$$\mathbf{f}(z_*) = \mathbf{B}^T \mathbf{u} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{B}^T \mathbf{u}' - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\varphi}', \quad \mathbf{u}' = 2 \operatorname{Re}\{\mathbf{c}g(z_t)\}, \quad \boldsymbol{\varphi}' = 2 \operatorname{Re}\{\mathbf{d}g(z_t)\}. \quad (4)$$

Функція $g'(z_t)$, температура і функція теплового потоку пов'язані між собою так [8]:

$$g'(z_t) = \frac{1}{2} \left(\theta + i \frac{\mathcal{G}}{k_t} \right). \quad (5)$$

2. Побудова інтегральних подань комплексних потенціалів для півпростору. Розглянемо термопружний півпростір $x_2 > 0$, що містить систему гладких замкнених контурів $\Gamma = \bigcup_i \Gamma_i$. Відповідно до інтегральної формули Коші [15] вектор $\mathbf{f}(z_*)$ комплексних потенціалів Стро у довільній точці z_* ($\operatorname{Im} z_* > 0$) півпростору можна обчислити за його контурними значеннями

$$\mathbf{f}(z_*) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left\langle \frac{d\tau_*}{\tau_* - z_*} \right\rangle \mathbf{f}(\tau_*) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*} \right\rangle \mathbf{f}(x_1) \quad (\text{Im } z_* > 0), \quad (6)$$

де $\langle F(z_*) \rangle = \text{diag}[F_1(z_1), F_2(z_2), F_3(z_3)]$. Додатним напрямом обходу контурів є той, за якого зайнята тілом область залишається ліворуч (зовнішня нормаль спрямована правобіч щодо напрямку руху).

Очевидно, що за межами півпростору інтеграли Коші (6) дорівнюють нулю, тобто для точок \bar{z}_* ($\text{Im } z_* > 0$) формула (6) набуде вигляду

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left\langle \frac{d\tau_*}{\tau_* - \bar{z}_*} \right\rangle \mathbf{f}(\tau_*) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - \bar{z}_*} \right\rangle \mathbf{f}(x_1) = \mathbf{0} \quad (\text{Im } z_* > 0). \quad (7)$$

Аналогічні інтегральні формули можуть бути записані й для функції $g'(z_i)$.

Отримані інтегральні подання містять інтеграли уздовж нескінченної межі півпростору, а це істотно знижує швидкість і точність подальших МГЕ-розрахунків. Оскільки крайові умови на межі півпростору відомі, ці інтеграли можуть бути виключені з формул (6), (7). Крайові умови в загальному випадку мають як механічний (a)–(b), так і тепловий (c)–(d) зміст, а саме:

a) поверхня півпростору з нульовим переміщенням точок межі

$$\mathbf{u}(x_1) = \mathbf{0}, \quad \forall x_2 = 0;$$

b) вільна від навантажень поверхня півпростору

$$\boldsymbol{\varphi}(x_1) = \mathbf{0}, \quad \forall x_2 = 0;$$

c) поверхня півпростору з нульовою температурою точок межі

$$\theta(x_1) = 0, \quad \forall x_2 = 0;$$

d) теплоізольована поверхня півпростору

$$\mathcal{G}(x_1) = 0, \quad \forall x_2 = 0.$$

Комбінуючи механічні умови з тепловими, можна отримати чотири різні крайові задачі. У подібний спосіб можна формулювати й змішані крайові задачі. Розглянемо задачу з механічною крайовою умовою (a) та тепловою (c) і для цієї задачі продемонструємо метод виключення інтегралів по необмеженій області [8].

2.1. *Теплопровідність.* Згідно з крайовою умовою (c) та співвідношення (5) інтегральну формулу для функції $g'(z_i)$ запишемо у вигляді

$$g'(z_i) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g'(\tau_i) d\tau_i}{\tau_i - z_i} + \frac{1}{4\pi k_i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{G}(x_1) dx_1}{x_1 - z_i}. \quad (8)$$

Обчислення відповідного інтегралу для комплексно спряженої точки \bar{z}_i та використання (5) і (8) дає таке значення інтеграла уздовж межі півпростору

$$\frac{1}{4\pi k_i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{G}(x_1) dx_1}{x_1 - z_i} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overline{g'(\tau_i)} d\bar{\tau}_i}{\bar{\tau}_i - z_i}. \quad (9)$$

Підставивши (9) у (8), матимемо інтегральне подання комплексної функції $g'(z_i)$ температури для півпростору з нульовою температурою межі

$$g'(z_i) = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\Gamma} \frac{g'(\tau_i) d\tau_i}{\tau_i - z_i} + \int_{\Gamma} \frac{\overline{g'(\tau_i)} d\bar{\tau}_i}{\bar{\tau}_i - z_i} \right]. \quad (10)$$

Використовуючи (5), можна також побудувати інтегральне подання функції $g'(z_i)$ через крайові значення фізичних полів θ і \mathcal{G}

$$g'(z_i) = \frac{1}{4\pi i} \left[\int_{\Gamma} \frac{(\theta + i\mathcal{G}/k_i) d\tau_i}{\tau_i - z_i} + \int_{\Gamma} \frac{(\theta - i\mathcal{G}/k_i) d\bar{\tau}_i}{\bar{\tau}_i - z_i} \right]. \quad (11)$$

Рівність (11) можна звести до криволінійних інтегралів першого роду. Подання (11) в такому випадку запишемо так:

$$g'(z_i) = -\frac{1}{4\pi i} \int_{\Gamma} \left[\frac{n_2(s) - p_i n_1(s)}{\tau_i(s) - z_i} + \frac{n_2(s) - \bar{p}_i n_1(s)}{\bar{\tau}_i(s) - z_i} \right] \theta(s) ds + \frac{1}{4\pi k_i} \int_{\Gamma} \left[\ln(\tau_i(s) - z_i) - \ln(\bar{\tau}_i(s) - z_i) \right] h_n(s) ds, \quad (12)$$

де $h_n = h_i n_i$ – нормальна компонента вектора теплового потоку; n_i – компоненти одиничного вектора зовнішньої нормалі до кривої Γ .

На основі (3) та (12) отримаємо інтегральні подання для температури і теплового потоку у довільній точці ξ півпростору $x_2 > 0$

$$\theta(\xi) = 2 \operatorname{Re} \left\{ g'(Z_i(\xi)) \right\} = \int_{\Gamma} \left[\Theta^{\text{hs}^*}(\mathbf{x}, \xi) h_n(\mathbf{x}) - H^{\text{hs}^*}(\mathbf{x}, \xi) \theta(\mathbf{x}) \right] ds(\mathbf{x}); \quad (13)$$

$$\begin{aligned} h_i(\xi) &= 2k_i \operatorname{Im} \left\{ (\delta_{2i} - \delta_{1i} p_i) g''(Z_i(\xi)) \right\} = \\ &= \int_{\Gamma} \Theta_i^{\text{hs}^{**}}(\mathbf{x}, \xi) h_n(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} H_i^{\text{hs}^{**}}(\mathbf{x}, \xi) \theta(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (14)$$

де ядра означені такими виразами:

$$\Theta^{\text{hs}^*}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{2\pi k_i} \left[\ln |Z_i(\mathbf{x} - \xi)| - \ln |\bar{Z}_i(\mathbf{x}) - Z_i(\xi)| \right], \quad Z_i(\mathbf{x}) = x_1 + p_i x_2, \quad (15)$$

$$H^{\text{hs}^*}(\mathbf{x}, \xi) = -k_{ij} n_j(\mathbf{x}) \Theta^{\text{hs}^*}(\mathbf{x}, \xi), \quad (16)$$

$$\Theta_i^{\text{hs}^{**}} = -k_{ij} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \Theta^{\text{hs}^*}(\mathbf{x}, \xi), \quad H_i^{\text{hs}^{**}} = -k_{ij} \frac{\partial}{\partial \xi_j} H^{\text{hs}^*}(\mathbf{x}, \xi). \quad (17)$$

2.2. *Термопружність.* Використовуючи крайову умову (а) та подання (4) комплексних потенціалів, перепишемо інтеграл по межі півпростору у (6):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*} \right\rangle \mathbf{f}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*} \right\rangle \left[\mathbf{A}^T \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{B}^T \mathbf{u}^t(x_1) - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\varphi}^t(x_1) \right]. \quad (18)$$

Інтегрування (18) частинами з огляду на обмеженість функцій $\mathbf{u}'(x_1)$ та $\boldsymbol{\varphi}'(x_1)$ дає

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*} \right\rangle \mathbf{f}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*} \right\rangle \mathbf{A}^T \boldsymbol{\varphi} + \int_{-\infty}^{\infty} \langle \ln(x_1 - z_*) \rangle \left[\mathbf{B}^T \frac{\partial \mathbf{u}'(x_1)}{\partial x_1} + \mathbf{A}^T \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}'(x_1)}{\partial x_1} \right] dx_1. \quad (19)$$

Врахуємо, що відповідно до (4), (5) та крайових умов (а), (с)

$$\mathbf{B}^T \frac{\partial \mathbf{u}'(x_1)}{\partial x_1} + \mathbf{A}^T \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}'(x_1)}{\partial x_1} = \mathbf{m} \frac{\mathcal{G}(x_1)}{k_t}, \quad (20)$$

де

$$\mathbf{m} = \mathbf{B}^T \text{Im}[\mathbf{c}] + \mathbf{A}^T \text{Im}[\mathbf{d}]. \quad (21)$$

Таким чином, інтеграл Коші (19) набуде вигляду

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*} \right\rangle \mathbf{f}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*} \right\rangle \mathbf{A}^T \boldsymbol{\varphi} + \frac{1}{k_t} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \ln(x_1 - z_*) \rangle \mathbf{m} \mathcal{G}(x_1) dx_1. \quad (22)$$

Підставивши (22) у (7), запишемо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - \bar{z}_*} \right\rangle \mathbf{A}^T \boldsymbol{\varphi} = - \int_{\Gamma} \left\langle \frac{d\tau_*}{\tau_* - \bar{z}_*} \right\rangle \mathbf{f}(\tau_*) - \frac{1}{k_t} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \ln(x_1 - \bar{z}_*) \rangle \mathbf{m} \mathcal{G}(x_1) dx_1 \quad (23)$$

або у комплексно спряженій формі

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*} \right\rangle \bar{\mathbf{A}}^T \boldsymbol{\varphi} = - \int_{\Gamma} \left\langle \frac{d\bar{\tau}_*}{\bar{\tau}_* - z_*} \right\rangle \overline{\mathbf{f}(\tau_*)} - \frac{1}{k_t} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \ln(x_1 - z_*) \rangle \bar{\mathbf{m}} \mathcal{G}(x_1) dx_1. \quad (24)$$

З урахуванням умов ортогональності формалізму Стро [13] перший інтеграл у правій частині (22) можна записати у вигляді

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*} \right\rangle \mathbf{A}^T \boldsymbol{\varphi} = - \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*} \right\rangle \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{A}}^T \boldsymbol{\varphi}(x_1) = - \sum_{\beta=1}^3 \mathbf{I}_{\beta} \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{A}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_{\beta}} \right\rangle \bar{\mathbf{A}}^T \boldsymbol{\varphi}(x_1). \quad (25)$$

Тут $\mathbf{I}_1 = \text{diag}[1, 0, 0, 0]$, $\mathbf{I}_2 = \text{diag}[0, 1, 0, 0]$, $\mathbf{I}_3 = \text{diag}[0, 0, 1, 0]$.

Після підставлення (24) у (25) та врахування отриманого співвідношення рівність (22) зводиться до

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*} \right\rangle \mathbf{f}(x_1) = \sum_{\beta=1}^3 \int_{\Gamma} \left\langle \frac{d\bar{\tau}_{\beta}}{\bar{\tau}_{\beta} - z_*} \right\rangle \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{A}} \mathbf{I}_{\beta} \overline{\mathbf{f}(\tau_*)} + \int_{-\infty}^{\infty} \langle \ln(x_1 - z_*) \rangle [\mathbf{m} + \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{m}}] \mathcal{G}(x_1) dx_1. \quad (26)$$

Використовуючи (21) та умови ортогональності [13], запишемо

$$\mathbf{m} + \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{m}} = (\mathbf{B}^T + \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{B}}^T) \text{Im}[\mathbf{c}] + (\mathbf{A}^T + \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{A}}^T) \text{Im}[\mathbf{d}] = \mathbf{A}^{-1} \text{Im}[\mathbf{c}], \quad (27)$$

а інтегрування (10) дає

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle \ln(x_1 - z_*) \rangle \mathcal{G}(x_1) dx_1 = \frac{2k_t}{i} \int_{\Gamma} \langle \ln(\bar{\tau}_t - z_*) \rangle \overline{g'(\tau_t)} d\bar{\tau}_t. \quad (28)$$

Таким чином, інтегральну формулу (6) можна записати у бажаній формі, що не містить інтегралів уздовж межі півпростору,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(z_*) = & \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\Gamma} \left\langle \frac{d\tau_*}{\tau_* - z_*} \right\rangle \mathbf{f}(\tau_*) + \right. \\ & \left. + \sum_{\beta=1}^3 \int_{\Gamma} \left\langle \frac{d\bar{\tau}_{\beta}}{\bar{\tau}_{\beta} - z_*} \right\rangle \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{A}} \mathbf{I}_{\beta} \overline{\mathbf{f}(\tau_*)} + \frac{2}{i} \int_{\Gamma} \langle \ln(\bar{\tau}_t - z_*) \rangle \mathbf{A}^{-1} \text{Im}[\mathbf{c}] \overline{g'(\tau_t)} d\bar{\tau}_t \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Відповідно до [8, 16] унаслідок використання співвідношення (4), (5) інтегральну формулу (29) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(z_*) = & \frac{1}{2\pi i} \left[- \int_{\Gamma} \left\langle \frac{n_2(s) - p_* n_1(s)}{\tau_*(s) - z_*} \right\rangle \mathbf{B}^T + \sum_{\beta=1}^3 \left\langle \frac{n_2(s) - \bar{p}_{\beta} n_1(s)}{\bar{\tau}_{\beta}(s) - z_*} \right\rangle \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{A}} \mathbf{I}_{\beta} \bar{\mathbf{B}}^T \right] \mathbf{u}(s) ds + \\ & + \int_{\Gamma} \left[\langle \ln(\tau_*(s) - z_*) \rangle \mathbf{A}^T + \sum_{\beta=1}^3 \langle \ln(\bar{\tau}_{\beta}(s) - z_*) \rangle \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{A}} \mathbf{I}_{\beta} \bar{\mathbf{A}}^T \right] \mathbf{t}(s) ds - \\ & - \int_{\Gamma} \langle \ln(\tau_*(s) - z_*) \rangle (\mathbf{A}^T \text{Re}[\mathbf{d}(n_2 - n_1 p_t)] + \mathbf{B}^T \text{Re}[\mathbf{c}(n_2 - n_1 p_t)]) \theta(s) ds - \\ & - \int_{\Gamma} \sum_{\beta=1}^3 \langle \ln(\bar{\tau}_{\beta}(s) - z_*) \rangle \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{A}} \mathbf{I}_{\beta} (\bar{\mathbf{A}}^T \text{Re}[\mathbf{d}(n_2 - n_1 p_t)] + \bar{\mathbf{B}}^T \text{Re}[\mathbf{c}(n_2 - n_1 p_t)]) \theta(s) ds + \\ & + i \int_{\Gamma} \langle \ln(\bar{\tau}_t(s) - z_*) \rangle [n_2(s) - \bar{p}_t n_1(s)] \mathbf{A}^{-1} \text{Im}[\mathbf{c}] \theta(s) ds - \\ & - \frac{1}{k_t} \int_{\Gamma} \langle f^*(\tau_*(s) - z_*) \rangle (\mathbf{A}^T \text{Im}[\mathbf{d}] + \mathbf{B}^T \text{Im}[\mathbf{c}]) h_n(s) ds + \frac{1}{k_t} \int_{\Gamma} \langle f^*(\bar{\tau}_t - z_*) \rangle \mathbf{A}^{-1} \text{Im}[\mathbf{c}] h_n(s) ds - \\ & - \frac{1}{k_t} \int_{\Gamma} \sum_{\beta=1}^3 \langle f^*(\bar{\tau}_{\beta}(s) - z_*) \rangle \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{A}} \mathbf{I}_{\beta} (\bar{\mathbf{A}}^T \text{Im}[\mathbf{d}] + \bar{\mathbf{B}}^T \text{Im}[\mathbf{c}]) h_n(s) ds. \end{aligned} \quad (30)$$

Відтак на основі (3), (8) та (30) можна побудувати інтегральну тотожність типу Сомільяни для переміщення в довільній точці ξ термопружного півпростору

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\xi) = & 2 \text{Re} \left\{ \mathbf{A} \mathbf{f}(Z_*(\xi)) + \mathbf{c} g(Z_t(\xi)) \right\} = \\ = & \int_{\Gamma} \left[\mathbf{U}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \xi) \mathbf{t}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \xi) \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{r}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \xi) \theta(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \xi) h_n(\mathbf{x}) \right] ds(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (31)$$

у якій ядра означені виразами

$$\mathbf{U}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[\mathbf{A} \langle \ln Z_*(\mathbf{x} - \xi) \rangle \mathbf{A}^T + \mathbf{A} \sum_{\beta=1}^3 \left\langle \ln(\bar{Z}_{\beta}(\mathbf{x}) - Z_*(\xi)) \right\rangle \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{A}} \mathbf{I}_{\beta} \bar{\mathbf{A}}^T \right]; \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \xi) = & -\frac{1}{\pi k_t} \text{Im} \left[\mathbf{A} \left\langle f^*(Z_*(\mathbf{x} - \xi)) \right\rangle (\mathbf{A}^T \text{Im}[\mathbf{d}] + \mathbf{B}^T \text{Im}[\mathbf{c}]) \right] - \\ & -\frac{1}{\pi k_t} \text{Im} \left[\sum_{\beta=1}^3 \mathbf{A} \left\langle f^*(\bar{Z}_\beta(\mathbf{x}) - Z_*(\xi)) \right\rangle \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{A}} \mathbf{I}_\beta (\bar{\mathbf{A}}^T \text{Im}[\mathbf{d}] + \bar{\mathbf{B}}^T \text{Im}[\mathbf{c}]) \right] - \\ & -\frac{1}{2\pi k_t} \text{Re} \left[\mathbf{c} \left[f^*(Z_t(\mathbf{x} - \xi)) - f^*(\bar{Z}_t(\mathbf{x}) - Z_t(\xi)) \right] \right] - \\ & -\frac{1}{\pi k_t} \text{Im} \left[\mathbf{A} \left\langle f^*(\bar{Z}_t(\mathbf{x}) - Z_*(\xi)) \right\rangle \mathbf{A}^{-1} \text{Im}[\mathbf{c}] \right]; \end{aligned} \quad (33)$$

$$T_{pi}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \xi) = C_{ijkm} n_j(\mathbf{x}) U_{pk,m}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \xi), \quad r_i^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \xi) = k_{pq} v_{i,q}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \xi) n_p(\mathbf{x}), \quad Z_*(\mathbf{x}) = x_1 + p_* x_2. \quad (34)$$

Так само із (3), (12) та (30) отримаємо інтегральне подання для тензора напружень

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_j(\xi) = & [\sigma_{ij}(\xi)] = 2 \text{Re} \left\{ \mathbf{B} (\delta_{2j} - \delta_{1j} \mathbf{P}) \mathbf{f}'(Z_*(\xi)) + \mathbf{d} (\delta_{2j} - \delta_{1j} p_t) g'(Z_t(\xi)) \right\} = \\ & = \int_{\Gamma} \mathbf{D}_j^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \xi) \mathbf{t}(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} \mathbf{S}_j^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \xi) \mathbf{u}(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) + \\ & + \int_{\Gamma} \mathbf{q}_j^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \xi) \theta(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} \mathbf{w}_j^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \xi) h_n(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (35)$$

Де

$$\begin{aligned} q_{ij}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \xi) = & C_{ijmp} \frac{\partial}{\partial \xi_p} r_m^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \xi) + \beta_{ij} H^{\text{hs}*}(\mathbf{x}, \xi), \quad D_{ijk}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \xi) = C_{ijmp} \frac{\partial}{\partial \xi_p} U_{mk}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \xi), \\ w_{ij}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \xi) = & C_{ijmp} \frac{\partial}{\partial \xi_p} v_m^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \xi) - \beta_{ij} \Theta^{\text{hs}*}(\mathbf{x}, \xi), \quad S_{ijk}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \xi) = C_{ijmp} \frac{\partial}{\partial \xi_p} T_{mk}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \xi). \end{aligned} \quad (36)$$

Таким чином, для задачі з крайовими умовами (а), (с) отримано відповідні інтегральні подання. Загалом, інтегральні залежності для чотирьох випадків крайових задач можна записати вигляді

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(z_*) = & \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\Gamma} \left\langle \frac{d\tau_*(s)}{\tau_*(s) - z_*} \right\rangle \mathbf{f}(\tau_*) + \sum_{\beta=1}^3 \left\langle \frac{d\bar{\tau}_\beta(s)}{\bar{\tau}_\beta(s) - z_*} \right\rangle \mathbf{F} \mathbf{f}(\tau_*) + \nu \int_{\Gamma} \langle \ln(\bar{\tau}_t - z_*) \rangle \mathbf{V} g'(\tau_t) d\bar{\tau} \right], \\ g'(z_t) = & \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\Gamma} \frac{g'(\tau_t) d\tau_t}{\tau_t - z_t} + \text{Ind}\{\theta, \mathcal{G}\} \int_{\Gamma} \frac{g'(\tau_t) d\bar{\tau}_t}{\bar{\tau}_t - z_t} \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

Тут

$$\mathbf{F} = \begin{cases} \mathbf{B}^{-1} \bar{\mathbf{B}}, & \boldsymbol{\varphi}(x_1) = 0, \mathcal{G}(x_1) = 0 \text{ або } \boldsymbol{\varphi}(x_1) = 0, \theta(x_1) = 0; \\ \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{A}}, & \mathbf{u}(x_1) = 0, \mathcal{G}(x_1) = 0 \text{ або } \mathbf{u}(x_1) = 0, \theta(x_1) = 0; \end{cases} \quad (38)$$

$$\mathbf{V} = \begin{cases} \mathbf{B}^{-1} \operatorname{Re}[\mathbf{d}], & \varphi(x_1) = 0, \vartheta(x_1) = 0; \\ \mathbf{A}^{-1} \operatorname{Im}[\mathbf{c}], & \mathbf{u}(x_1) = 0, \theta(x_1) = 0; \\ \mathbf{B}^{-1} \operatorname{Im}[\mathbf{d}], & \varphi(x_1) = 0, \theta(x_1) = 0; \\ \mathbf{A}^{-1} \operatorname{Re}[\mathbf{c}], & \mathbf{u}(x_1) = 0, \vartheta(x_1) = 0; \end{cases} \quad (39)$$

$$\mathbf{v} = \begin{cases} -2i, & \varphi(x_1) = 0, \vartheta(x_1) = 0 \text{ або } \mathbf{u}(x_1) = 0, \vartheta(x_1) = 0, \\ -2, & \varphi(x_1) = 0, \theta(x_1) = 0 \text{ або } \mathbf{u}(x_1) = 0, \theta(x_1) = 0; \end{cases} \quad (40)$$

$$\operatorname{Ind}\{\vartheta, \theta\} = \begin{cases} 1, & \theta(x_1) = 0, \forall x_2 = 0, \\ -1, & \vartheta(x_1) = 0, \forall x_2 = 0. \end{cases} \quad (41)$$

Відповідно інтегральні подання для температури і теплового потоку матимуть вигляд (13), (14), де ядра означені формулами (16), (17) та виразом

$$\Theta^{\text{hs}^*}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{2\pi k_i} \left[\ln |Z_i(\mathbf{x} - \xi)| - \operatorname{Ind}\{\vartheta, \theta\} \ln |\bar{Z}_i(\mathbf{x}) - Z_i(\xi)| \right]. \quad (42)$$

Інтегральні подання для термопружного півпростору та розширеного тензора напружень, враховуючи рівності (38) – (41), матимуть вигляд (31), (35), де ядра означатимуться виразами (34), (36) та

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \xi) &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[\mathbf{A} \langle \ln Z_*(\mathbf{x} - \xi) \rangle \mathbf{A}^T + \mathbf{A} \sum_{\beta=1}^3 \langle \ln (\bar{Z}_\beta(\mathbf{x}) - Z_*(\xi)) \rangle \mathbf{F} \mathbf{I}_\beta \bar{\mathbf{A}}^T \right], \\ \mathbf{v}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \xi) &= -\frac{1}{\pi k_i} \operatorname{Im} \left[\mathbf{A} \langle f^*(Z_*(\mathbf{x} - \xi)) \rangle (\mathbf{A}^T \operatorname{Im}[\mathbf{d}] + \mathbf{B}^T \operatorname{Im}[\mathbf{c}]) \right] - \\ &\quad - \frac{1}{\pi k_i} \operatorname{Im} \left[\sum_{\beta=1}^3 \mathbf{A} \langle f^*(\bar{Z}_\beta(\mathbf{x}) - Z_*(\xi)) \rangle \mathbf{F} \mathbf{I}_\beta (\bar{\mathbf{A}}^T \operatorname{Im}[\mathbf{d}] + \bar{\mathbf{B}}^T \operatorname{Im}[\mathbf{c}]) \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi k_i} \operatorname{Re} \left[\mathbf{c} \left[f^*(Z_i(\mathbf{x} - \xi)) - \operatorname{Ind}\{\vartheta, \theta\} f^*(\bar{Z}_i(\mathbf{x}) - Z_i(\xi)) \right] \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi k_i} \operatorname{Im} \left[\mathbf{A} \langle f^*(\bar{Z}_i(\mathbf{x}) - Z_*(\xi)) \rangle \mathbf{V} \mathbf{v} \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

Крайові умови на контурах Γ задають лише половину із компонент функцій $\theta(\mathbf{x})$, $h_n(\mathbf{x})$, $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ та $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ ($\forall \mathbf{x} \in \Gamma$). Тому відповідно до [9, 15] для гладких замкнених контурів Γ у термопружному півпросторі їх потрібно доповнити такими інтегральними рівняннями:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\theta(\mathbf{y}) &= \text{RPV} \int_{\Gamma} \Theta^{\text{hs}*}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) h_n(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma} H^{\text{hs}*}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \theta(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}), \\ \frac{1}{2}\mathbf{u}(\mathbf{y}) &= \text{RPV} \int_{\Gamma} \mathbf{U}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{t}(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma} \mathbf{T}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) + \\ &+ \text{RPV} \int_{\Gamma} \mathbf{r}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \theta(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} \mathbf{v}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) h_n(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (44)$$

де аббревіатура RPV – означає головне значення невластивого інтеграла; CPV – головне значення інтеграла Коші.

При розв’язуванні задач для тіл із розрізами (математичні моделі задач для тіл із тріщинами, щілинами чи тонкими включеннями), коли окремі замкнені контури Γ_j лінії Γ стають берегами математичних розрізів Γ_{cj} (простих розімкнених дуг), інтегральні рівняння (44) вироджуються, тому слід застосовувати теорію дуальних гіперсингулярних інтегральних рівнянь [8,9,16].

Інтегральні рівняння сумісно з моделями тонких термопружних включень [9,16,17] дають можливість розв’язувати задачі для півпросторів із отворами, тріщинами та тонкими включеннями, зокрема й числово за допомогою модифікованого методу граничних елементів [8].

Відповідно до [16] крайові функції стрибків напружень та переміщень поблизу вершин тонких неоднорідностей характеризуються узагальненими коефіцієнтами інтенсивності напружень (КІН), що визначаються в локальній системі координат із початком у вершині через функції стрибка у вершині неоднорідності за формулами

$$\mathbf{k}^{(1)} = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{8s}} \mathbf{L} \cdot \Delta \mathbf{u}(s), \quad \mathbf{k}^{(2)} = - \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi s}{2}} \Sigma \mathbf{t}(s), \quad (45)$$

де $\mathbf{k}^{(1)} = [K_{21}, K_{11}, K_{31}]^T$, $\mathbf{k}^{(2)} = [K_{12}^{(2)}, K_{22}^{(2)}, K_{32}^{(2)}]^T$; K_{ij} – узагальнені КІН [9,16,17]; $\mathbf{L} = -2\sqrt{-1}\mathbf{B}\mathbf{B}^T$ – дійсний тензор Barnett – Lothe [13, 14]. Ці коефіцієнти характеризують перші члени асимптотичних розподілів фізико-механічних полів в околі вершин неоднорідностей.

Для моделювання тіла з тонкими неоднорідностями (деформівними чи абсолютно жорсткими) дуже продуктивно використовується принцип спряження континуумів різної вимірності. Суть цього принципу полягає у заміні тонкого включення з певною площею поперечного перерізу деякою лінією розриву теплофізичного та напружено-деформованого стану тіла. Включення як геометричний об’єкт вилучається з розгляду, а його вплив зводиться до формування у матриці певних функцій стрибка деяких характеристик фізико-механічних полів. Величини цих стрибків залежать від особливостей геометрії та властивостей включення, які враховуються його математичною моделлю, а також умов його контакту з прилеглим матеріалом. Конкретні моделі анізотропних термопружних тонких включень описано у працях [8,16]. Використаємо їх та побудовані інтегральні рівняння зовнішньої задачі при вивченні конкретних числових прикладів.

3. Числові приклади. Для підтвердження ефективності й точності числового алгоритму розв’яжемо деякі задачі для тіл із тріщинами або тонкими включеннями. Усі розрахунки задач здійснено спеціально модифікованим методом граничних елементів [8]. Для розбиття осьової лінії тонкої неоднорідності використано всього 20 граничних триточкових елементів включно з двома спеціальними кінцевими.

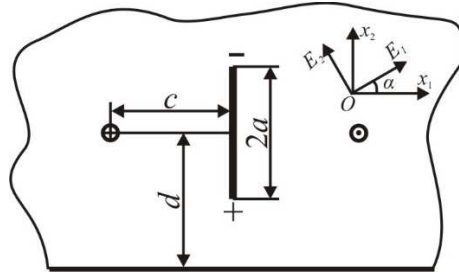


Рисунок 1. Термопружний анізотропний півпростір із тонким включенням

Figure 1. Thermoelastic anisotropic half-space with a thin inclusion

Розглянемо анізотропний термопружний півпростір $x_2 > 0$, що містить тонке прямолінійне теплоізольоване пружне ізотропне включення завдовжки $2a$ і завтовшки $2h$ ($h = 0,01a$). Вісь включення перпендикулярна до межі півпростору. Центр включення розташований на відстані d до межі півпростору. У півпросторі на однаковій відстані $c = p \cdot a$ праворуч і ліворуч від центра включення розміщено джерело та стік тепла однакової інтенсивності. Півпростір має властивості анізотропного склопластику з такими властивостями: $E_1 = 55$ ГПа, $E_2 = 21$ ГПа, $G_{12} = 9,7$ ГПа, $\nu_{12} = 0,25$, $\alpha_{11} = 6,3 \cdot 10^{-6}$ K^{-1} , $\alpha_{22} = 2,0 \cdot 10^{-5}$ K^{-1} , $k_{11} = 3,46$ Вт/(м·К), $k_{22} = 0,35$ Вт/(м·К). Значення цих матеріальних констант відповідають напрямкам головних осей анізотропії, які нахилені до осей глобальної системи координат під кутом α (рис.1).

На поданих нижче рисунках зображено залежність нормованих величиною $K_0 = q \cdot a \sqrt{\pi a} \cdot E_1 \cdot \alpha_{11} / k_{11}$ узагальнених КІН від відносної жорсткості $k = G^i / G_{12}$ неоднорідності, де G^i модуль зсуву матеріалу включення. Вважається, що включення температурно нейтральне і не зазнає теплового розширення. Графіки подано для двох різних значень параметра $\lambda = a/d$ (0,1; 0,5), двох кутів орієнтації головних осей анізотропії ($\alpha = 0$, $\alpha = \pi/2$) та чотирьох типів крайових умов на межі півпростору ((a) – $\mathbf{u}(x_1) = 0$, $\theta(x_1) = 0$; (b) – $\varphi(x_1) = 0$, $\theta(x_1) = 0$; (c) – $\varphi(x_1) = 0$, $\vartheta(x_1) = 0$; (d) – $\mathbf{u}(x_1) = 0$, $\vartheta(x_1) = 0$).

З рис.2 бачимо, що у випадку, коли межа півпростору вільна від механічного навантаження, а головні осі анізотропії орієнтовані щодо глобальних осей під кутом $\alpha = 0$, КІН моди I (перший індекс у КІН дорівнює одиниці) для півпростору з жорстко закріпленою межею є набагато меншими від отриманих при врахуванні інших крайових умов.

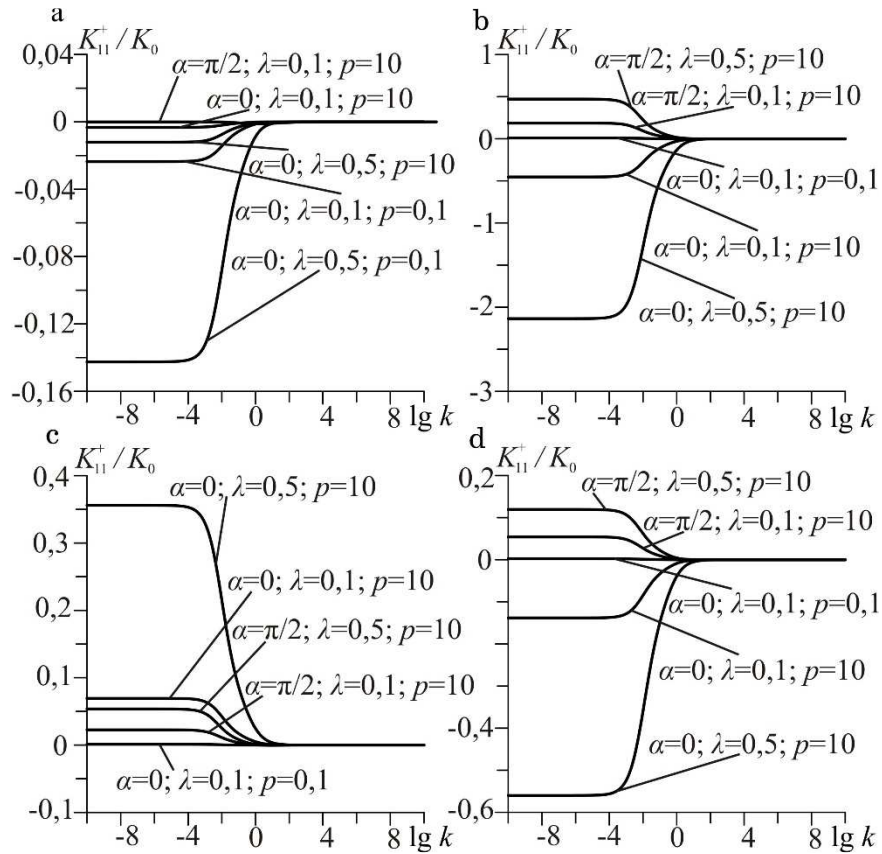


Рисунок 2. Коефіцієнт інтенсивності напружень K_{11}
 Figure 2. Stress intensity factor K_{11}

Віддалення джерел тепла від центра включення зменшує інтенсивність напружень нормального відриву. Коли головні осі анізотропії розташовані під кутом $\alpha = \pi / 2$ до глобальних осей, спостерігається збільшення нормованого КІН K_{11} / K_0 .

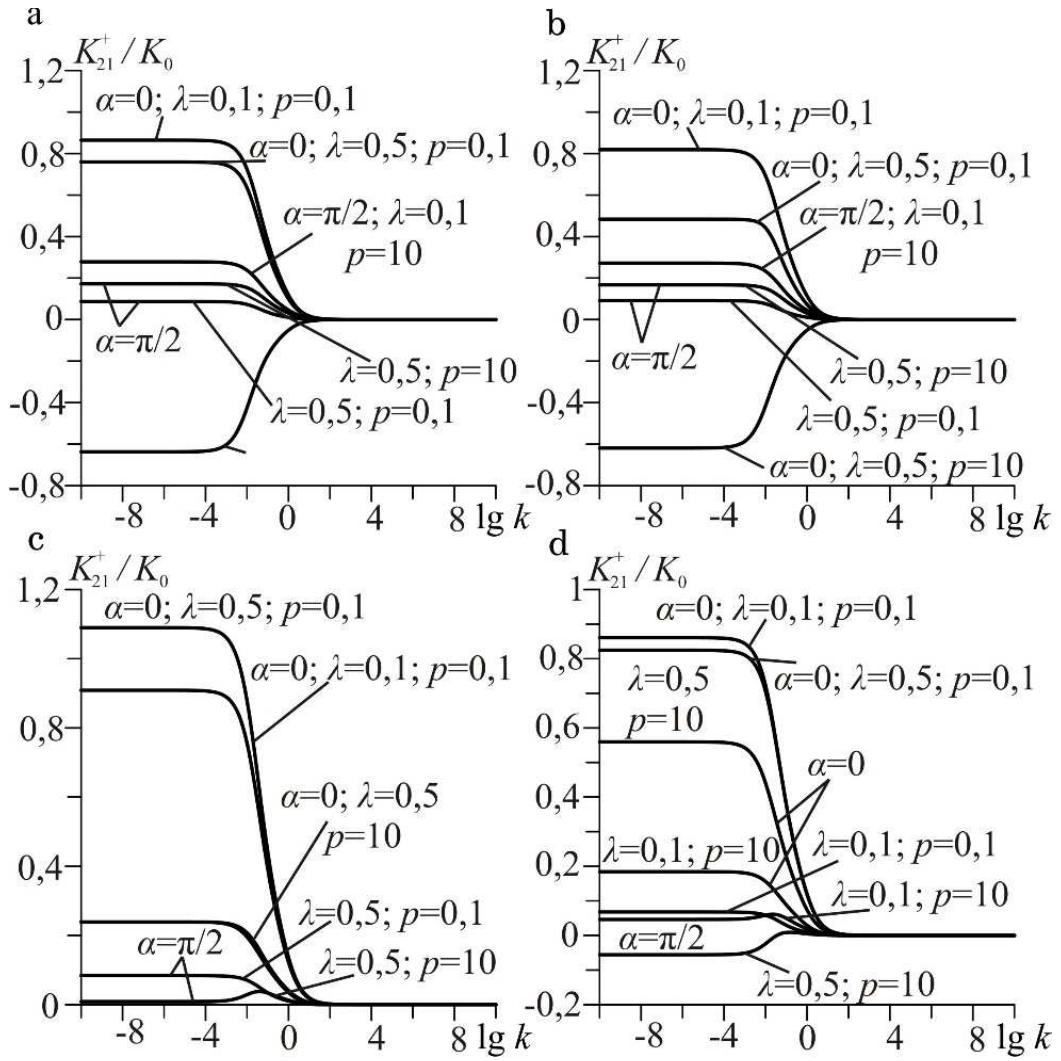


Рисунок 3. Коефіцієнт інтенсивності напружень K_{21}

Figure 3. Stress intensity factor K_{21}

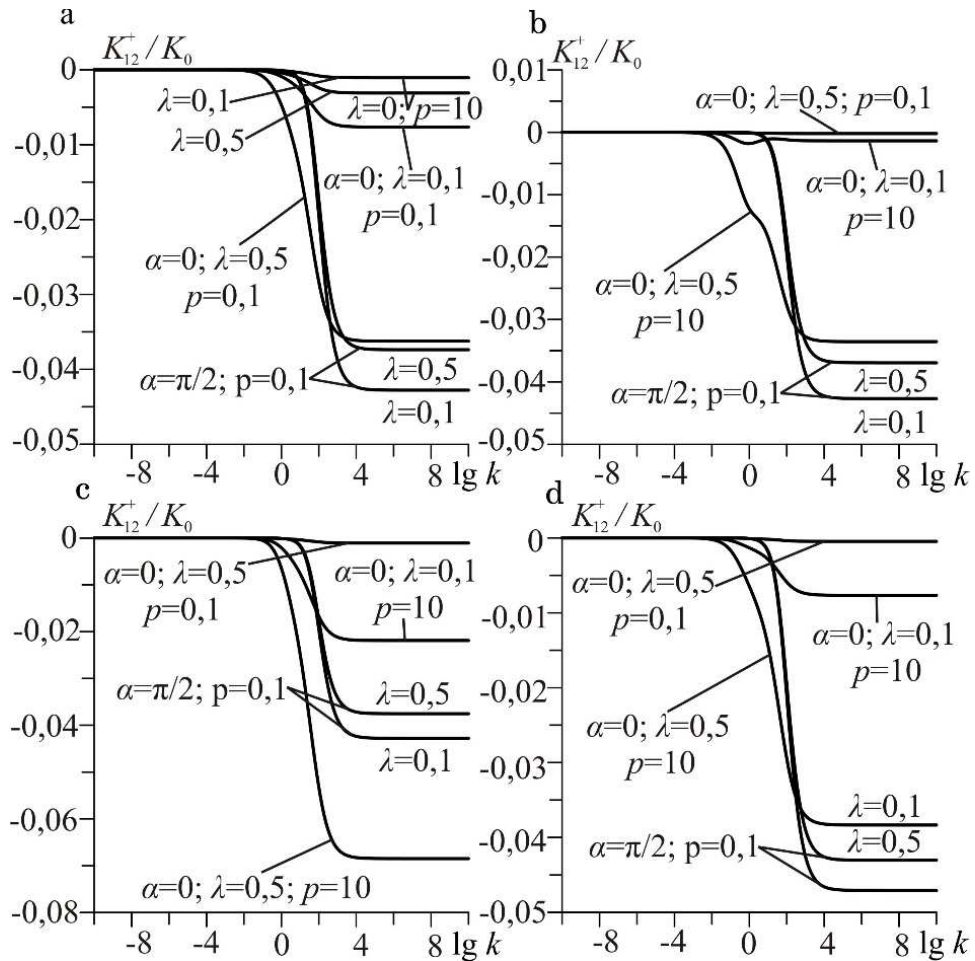


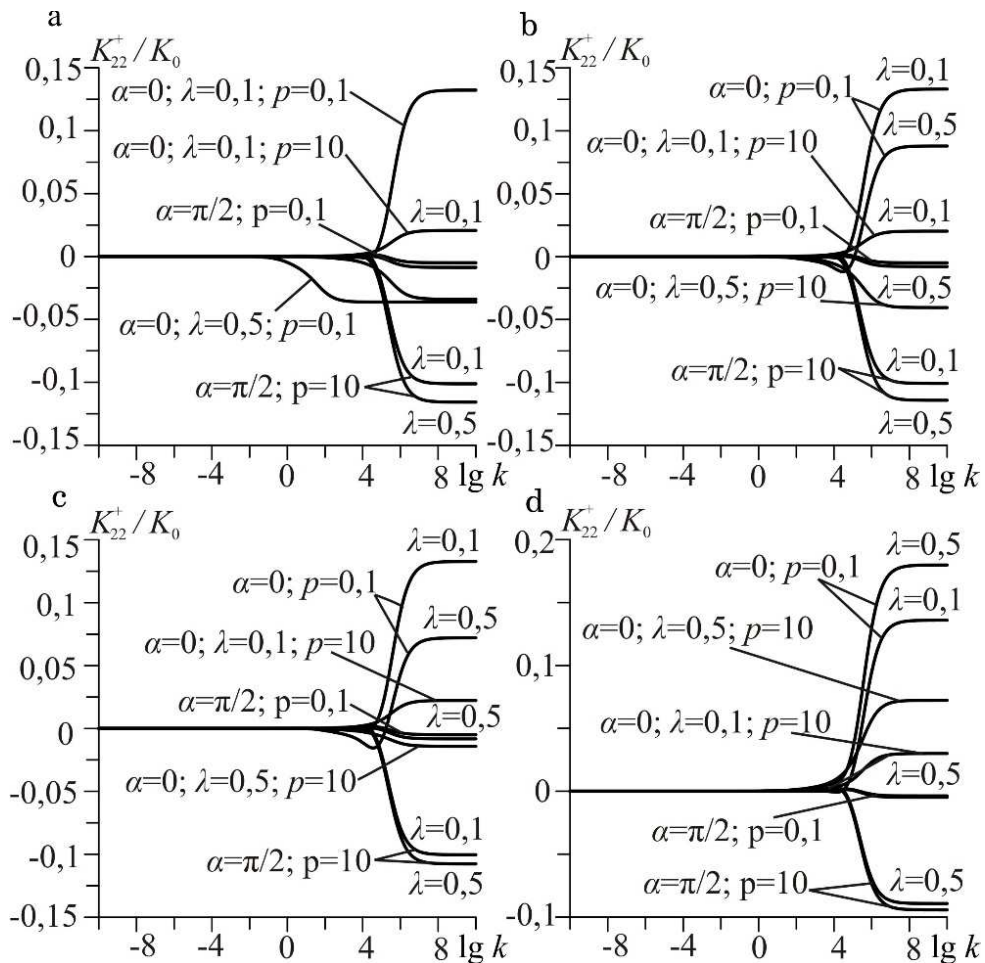
Рисунок 4. Коефіцієнт інтенсивності напружень K_{12}

Figure 4. Stress intensity factor K_{12}

Якщо межа півпростору жорстко закріплена (крайові умови (а), (d)) у разі теплоізоляції цієї межі КІН K_{11} є набагато меншим від розрахованого у разі, коли температури межі нульова.

З рис.2 також бачимо, що для кута $\alpha = 0$ умова рівності нулю напружень і теплового потоку на межі півпростору кардинально змінює поведінку КІН моди I : значення КІН стають додатними на відміну від інших випадків крайових умов.

Вплив крайових умов на КІН моди II (рис.3) у випадку кута $\alpha = 0$ є незначним. Варто зазначити, що при зростанні відстані джерел тепла до центра включення і зближенні цього центра включення із межею півпростору, теплоізоляційність межі зумовлює зміну знака КІН K_{21} . Тобто, на відміну від випадків крайових умов (а), (b) при збільшенні жорсткості включення КІН K_{21} у цьому разі зменшується. Коли ж $\alpha = \pi/2$, ізоляція межі півпростору від тепла знову ж таки зменшує КІН моди II .

Рисунок 5. Коефіцієнт інтенсивності напружень K_{22} Figure 5. Stress intensity factor K_{22}

Для нормованого КІН K_{12}/K_0 (за $\alpha = 0$) зміна крайових умов є відчутною, коли відстань від центра включення до межі півпростору зменшується, а відстань до джерел тепла збільшується (рис.4). У такому випадку теплоізоляційність межі посилює тенденцію зменшення КІН K_{12} . Цікавим є також випадок, коли межа півпростору є вільною від будь-якого механічного впливу і її температура дорівнює нулю. Тоді, за близької до нуля жорсткості включення при його наближенні до межі спостерігається деяке зростання інтенсивності напружень.

КІН K_{22}/K_0 (рис.5) в усіх чотирьох випадках крайових умов при значній відстані джерел тепла до включення і відстані включення до межі півпростору не зазнає великого впливу крайових умов. Лише коли і включення, і джерела тепла, і межа півпростору є достатньо близькими, вплив крайових умов стає відчутним. Причому це стає найбільш відчутним, коли межа жорстко закріплена й теплоізолювана.

Висновки. Запропоновано прямий підхід до побудови інтегральних формул типу Сомільяни та відповідних інтегральних рівнянь для плоскої задачі термопружності структурно неоднорідного анізотропного півпростору. Ці співвідношення містять виключно інтеграли по контурах внутрішніх неоднорідностей, а інтеграли – по межі півпростору, які ускладнюють розв’язування задачі та зменшують точність обчислень, відсутні. Подання ядер побудованих інтегральних рівнянь для чотирьох можливих випадків однорідних крайових умов на межі середовища отримано

у замкненій формі. Впроваджені у схему модифікованого методу граничних елементів ці інтегральні рівняння у поєднанні з моделями тонких неоднорідностей дали можливість розв'язати низку нових задач для термопружного півпростору з тріщинами й тонкими деформівними включеннями.

Conclusions. The paper presents a direct approach for the derivation of the Somigliana type integral formulae and corresponding integral equations for a plane thermoelastic inhomogeneous anisotropic half-space. These identities contain only integrals over the contours of internal inhomogeneities, and the integrals over infinite path are excluded. The kernels of these equations are obtained in a closed form for the four possible cases of homogeneous boundary conditions at the boundary of a medium. These integral equations along with the models of thin inhomogeneities are introduced into the modified boundary element method procedure, which allow solving new problems for a thermoelastic half-space with cracks and thin deformable inclusions.

Список використаної літератури

1. Калоеров, С.А. Напряженное состояние кусочно-однородного анизотропного полупространства с трещинами, упругими и жесткими включениями [Текст] / С.А. Калоеров, Е.В. Авдюшина, Ю.Б. Качан // Теорет. и прикл. мех. – 2002. – №35. – С.53–65.
2. Калоеров, С.А. Термоэлектромагнитоупругое состояние многосвязной анизотропной полуплоскости [Текст] / С.А. Калоеров, Д.А. Добряк // Теорет. и прикл. мех. – 2010. – №1(47). – С.45–61.
3. Сулим, Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями [Текст] / Г.Т. Сулим. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
4. Qin, Q. Thermoelastic analysis of cracks in piezoelectric half-plane by BEM [Text] / Q. Qin // Computational Mechanics. – 1999. – 23. – С.353–360.
5. Shiah, Y.C. Fracture mechanics analysis in 2-D anisotropic thermoelasticity using BEM [Text] / Y.C. Shiah, C.L. Tan // CMES. – 2000. – №1(3). – P.91–99.
6. Mukherjee, Y.X. Thermoelastic fracture mechanics with regularized hypersingular boundary integral equations [Text] / Y.X. Mukherjee, K. Shah, S. Mukherjee // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 1999. – 23. – P.89–96.
7. Пастернак, Я. М. Узагальнена тотожність Сомільяни для термомагнітоелектропружних анізотропних тіл [Текст] / Я.М. Пастернак, Г.Т. Сулим, Р.М. Пастернак // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – 56, №3. – С.158–169.
8. Pasternak, Ia. Boundary integral equations and the boundary element method for fracture mechanics analysis in 2D anisotropic thermoelasticity [Text] / Ia. Pasternak // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2012. – 36, №12. – P.1931–1941.
9. Pasternak, Ia. Boundary integral equations for 2D thermoelectroelasticity of a half-space with cracks and thin inclusions [Text] / Ia. Pasternak, R. Pasternak, H. Sulym // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2013. – 37. – P.1514–1523.
10. Prasad, N.V. The dual boundary element method for thermoelastic crack problems [Text] / N.V. Prasad, M.H. Aliabadi, D.P. Rooke // Int. J. Fract. – 1994. – 66. – P.255–272.
11. Shiah, Y.C. Two-dimensional BEM, thermoelastic analysis of anisotropic media with concentrated heat sources [Text] / Y.C. Shiah, T.L. Guao, C.L. Tan // CMES. – 2005. – №7(3). – P.321–328.
12. Pasternak, Ia. Stroh formalism based boundary integral equations for 2D magnetoelectroelasticity [Text] / Ia. Pasternak, H. Sulym // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2013. – 37, №1. – P.167–175.
13. Hwu, C. Anisotropic elastic plates [Text] / C. Hwu. – London: Springer, 2010. – 673 p.
14. Ting, T. C. T. Anisotropic elasticity: theory and applications // New York: Oxford University Press, 1996. – 567 p.
15. Мухелишвили, Н.И. Сингулярные интегральные уравнения [Текст] / Н. И. Мухелишвили. – Изд. 3-е, испр. и дополн. – М.: Наука, 1968. – 512 с.
16. Pasternak, Ia. A comprehensive study on the 2D boundary element method for anisotropic thermoelectroelastic solids with cracks and thin inhomogeneities [Text] / Ia. Pasternak, R. Pasternak, H. Sulym // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2013. – 37, № 2. – P.419–433.

Отримано 28.07.2014