

Михайлишин М. Математичне моделювання індукційного нагріву в процесах відновлювання експлуатаційних властивостей деталей циліндричної форми / М. Михайлишин, О. Шаблій, О. Король // Вісник ТНТУ — Тернопіль : ТНТУ, 2014. — Том 76. — № 4. — С. 233-250. — (Математичне моделювання. Математика. Фізика).

УДК 621.791.927.7

**М. Михайлишин, канд. фіз.-мат. наук;  
О. Шаблій, докт. фіз.-мат. наук; О. Король**

*Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя*

## **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ІНДУКЦІЙНОГО НАГРІВУ В ПРОЦЕСАХ ВІДНОВЛЮВАННЯ ЕКСПЛУАТАЦІЙНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ДЕТАЛЕЙ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ФОРМИ**

*Резюме.* Розроблено математичну модель для визначення питомої потужності теплових джерел, які виникають у результаті індукційного нагріву масивних циліндричних тіл. Такий нагрів використовується в технологічних процесах відновлювання експлуатаційних властивостей коліс залізничного транспорту методом нарощування їхньої робочої поверхні за допомогою заливки рідкого металу і схоплення його з підготовленою для відновлювання поверхнею.

За допомогою розробленої математичної моделі проведено дослідження залежності питомої потужності теплових джерел від частоти і сили струму в індукторі й тривалості нагрівання.

**Ключові слова:** магнітне та електромагнітне поле, магнітна індукція, питома потужність, теплові джерела, частота струму, індуктор, нагрівальні системи.

**M. Mykhailyshyn, O. Shabliy, O. Korol**

## **MATHEMATIC MODELING OF THE INDUCTION HEATING IN RECUPERATING OF THE OPERATION CHARACTERISTICS OF CULINDER-SHAPE PARTS**

*Summary.* The increase of durability and reliability of parts and operating members of machines and mechanisms is one of the most important issues for various sectors of the economy of Ukraine. In order to improve the parts wear resistance during operation, their working surfaces are strengthened by various surfacing methods. Available surfacing processes of worn working cylindrical bodies, induction ones in particular, possess some disadvantages: relatively low productivity, large energy consuming and uneven thickness of the surfacing metal. To improve these characteristics, theoretical foundations of improving welding technology and increasing of its energy efficiency should be developed.

A mathematical model to determine the specific power of heat sources, resulting from the induction heating of huge cylindrical bodies, has been developed. This type of heating is applied in industrial processes for the recuperating of rail transport wheels performance characteristics by growing of their working surface and pouring with a liquid metal and connection of it with prepared for recuperation surface.

Applying the developed mathematical model, the investigation for the dependency of heat source specific power on the frequency and current strength in the inductor and heating duration has been conducted.

It was found that for the development of the recuperation technology of worn working surfaces of cylindrical shape bodies it is necessary to heat its prepared end area up to 1300–1450°C to prepare the crucible for pouring in it the molten metal and further cooling of base metal together with the poured in the crucible. At temperature 1450–1600°C both the poured liquid metal and prepared on the border between them the base metal are in the liquid state and in the amount of liquid metal and austenite, that is, conditions for their mutual mixing and diffusion will be created to promote their real joining.

**Key words:** magnetic and electromagnetic field, magnetic induction, specific power, thermal sources, frequency of current, inductor, heater systems.

**Постановка проблеми.** Одним із ефективних способів відновлення експлуатаційних властивостей спрацьованих деталей циліндричної форми, в тому числі коліс залізничних вагонів, є нарощування спрацьованої робочої поверхні колеса розплавленим металом. Для цього необхідно попередньо підготовлену до нарощування поверхню нагріти до високої температури (близької до температури плавлення основного металу) для того, щоб відбулося надійне з'єднання розплавленого й

основного металу. Виходячи з умов забезпечення необхідної точності, а також з економічних міркувань, найбільш сприйнятливим є індукційний нагрів одночасно всієї робочої поверхні колеса. Для побудови раціональних режимів такого нагрівання потрібно побудувати відповідну математичну модель і на її основі провести необхідні дослідження.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** У роботі [1] побудовані математичні моделі індукційного нагріву, електропровідного шару, півпростору, біметалічного шару і нескінченного суцільного й порожнинного циліндрів. Отримані розв'язки відповідних задач методами інтегральних перетворень для випадку, коли струмами заміщення в області електропровідного тіла нехтують. У роботі [2] запропоновано математичну модель і методику чисельного моделювання електромеханічних, теплових і механічних процесів в електропровідних тілах за індукційного нагріву з використанням методу скінчених елементів і методу зважених залишків.

**Мета роботи.** Запропонувати математичну модель і методику дослідження електромагнітних полів, що виникають при індукційному нагріві коліс залізничних вагонів у процесах відновлення їх експлуатаційних властивостей.

**Методи і результати досліджень.** Формулювання задачі. Приймаємо, що електромагнітне поле описує система рівнянь Максвелла [1]

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \sigma \vec{E} + \vec{j}_{cm}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (4)$$

де  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  – вектори напруженості електричного і магнітного полів;

$\vec{D}$ ,  $\vec{B}$  – вектори електричної і магнітної індукцій;

$\rho$  – об'ємна густина електричних зарядів;

$\sigma$  – питома об'ємна провідність.

Рівняння стану приймаємо в лінійній формі

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad (5)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (6)$$

де  $\varepsilon$  і  $\mu$  – абсолютна діелектрична і магнітна проникливості матеріалу.

В праву частину рівняння (1) входить повний струм, який у загальному випадку включає в себе струм зміщення, струм провідності, поляризаційний струм і так званий сторонній струм, який викликається зовнішніми відносно розглядуваного тіла джерелами.

У вакуумі вектор  $\vec{D}$  зв'язаний з вектором  $\vec{E}$  залежністю

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (7)$$

де  $\varepsilon_0$  – електрична постійна вакууму,  $\varepsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}$ .

Для описання явищ у діелектриках прийнято вектор  $\vec{D}$  вводити так:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (8)$$

де  $\vec{P}$  – вектор електричної поляризації, причому для більшості речовин існує залежність

$$\vec{P} = k_e \vec{E}, \quad (9)$$

де  $k_e$  – коефіцієнт діелектричної сприйнятливості.

Підставивши (9) в (8), знайдемо

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + k_e \vec{E} = (\varepsilon_0 + k_e) \vec{E} = \varepsilon \vec{E}. \quad (10)$$

Отже, абсолютна діелектрична проникливість матеріалу в загальному випадку дорівнює

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + k_e. \quad (11)$$

Перший член у правій частині (1) включає в себе струм зміщення й поляризаційний струм

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \vec{j}_{\text{зм}} + \vec{j}_{\text{пол}}. \quad (12)$$

Другий член у правій частині (1) називають струмом провідності, (який виражає закон Ома в диференціальній формі для нерухомого середовища).

$$\vec{j}_{np} = \sigma \vec{E}, \quad (13)$$

а останній член – сторонній струм. У зв'язку з тим, що надалі ми розглядаємо індукційне нагрівання, то струми в індукторах будуть джерелами електромагнітного поля й саме ці струми і будуть  $\vec{j}_{cm}$ .

Напруженість магнітного поля  $\vec{H}$  і вектор магнітної індукції  $\vec{B}$  у вакуумі зв'язані співвідношенням

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad (14)$$

де  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma}{\text{м}}$  – магнітна постійна вакууму.

Магнітні властивості речовини описують з допомогою вектора намагніченості  $\vec{M}$  (аналогічно як для діелектриків вектор  $\vec{P}$ ). Цей вектор подібно до (8) водять так:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}). \quad (15)$$

Для більшості речовин при не дуже сильних магнітних полях існує залежність

$$\vec{M} = k_m \vec{H}, \quad (16)$$

де  $k_m$  – коефіцієнт магнітної сприйнятливості.

Отже,

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + k_m \vec{H}) = \mu_0 (1 + k_m) \vec{H} = \mu \vec{H}. \quad (17)$$

Абсолютна магнітна проникливість у загальному випадку буде

$$\mu = \mu_0 (1 + k_m). \quad (18)$$

У роботі [1] показано, що коли в початковий момент часу густина електричних зарядів у тілі дорівнює нулю, то функція  $\rho$  дорівнює нулю в довільний момент часу. Якщо зовнішні струми (струми у вакуумі) задовольняють умову  $\text{div} \vec{j}_{cm} = 0$  і початкова густина електричних зарядів у вакуумі дорівнює нулю, то і в довільний момент часу в області вакууму  $\rho^{(0)} = 0$ . Отже, в цьому випадку для області тіла і для області вакууму в довільний момент часу виконується рівняння

$$\text{div} \vec{E} = 0. \quad (19)$$

Надалі будемо записувати основні рівняння окремо для електропровідного тіла і для області вакууму. Враховуючи (10) і (17), запишемо систему рівнянь електродинаміки у вигляді [1]

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E}, \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \operatorname{div} \vec{H} = 0, \operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (20)$$

для області електропровідного тіла;

$$\operatorname{rot} \vec{H}^{(0)} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}^{(0)}}{\partial t} + \vec{j}^{(0)}, \operatorname{rot} \vec{E}^{(0)} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}^{(0)}}{\partial t}, \operatorname{div} \vec{H}^{(0)} = 0, \operatorname{div} \vec{E}^{(0)} = 0 \quad (21)$$

для області вакууму (тут враховано, що в області вакууму струм провідності відсутній).

На границі тіло – вакуум повинні виконуватися умови спряження [1]

$$(\vec{E})_\tau = (E^{(0)})_\tau, (\vec{H})_\tau = (H^{(0)})_\tau, \quad (22)$$

які виражають неперервність дотичних складових електромагнітного поля.

На нескінченості в області вакууму повинні виконуватися так звані умови випромінювання, згідно з якими на нескінченності електромагнітне поле відсутнє [2]. Аналітично ці умови мають вигляд [1]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left| E^{(0)}(\vec{r}, t) \right| = \text{const}; \lim_{r \rightarrow \infty} r \left[ \frac{\partial E^{(0)}(\vec{r}, t)}{\partial r} + \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial E^{(0)}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right] = 0. \quad (23)$$

При індукційній термообробці задані поза межами тіла індукційні струми можна записати у вигляді [1]

$$\vec{j}^{(0)}(\vec{r}, t) = j(t) \vec{j}_*^{(0)}(\vec{r}) e^{i\omega t}, \quad (24)$$

в якому амплітуда  $j(t)$  відносно мало змінюється в часі за період коливання, тобто

$$\left| \frac{dj(t)}{dt} \right| \ll \omega j(t), \left| \frac{d^2 j(t)}{dt^2} \right| \ll \omega^2 j(t). \quad (25)$$

Такі режими роботи індуктора називають квазіусталеними, а відповідне електромагнітне поле – квазіусталеним. Для такого режиму напруженість електричного і магнітного полів можна наближено записати у вигляді

$$\vec{E} = j(t) \vec{E}_*(\vec{r}) e^{i\omega t}, \vec{H} = j(t) \vec{H}_*(\vec{r}) e^{i\omega t}. \quad (26)$$

Таке ж представлення має місце і для області вакууму.

Якщо підставити (26) у рівняння (20) із урахуванням матеріальних рівнянь (5), (6) і знехтувати  $\frac{dj}{dt}$  порівняно з  $\omega j(t)$ , то після скорочення на  $j(t) e^{i\omega t}$  отримаємо

$$\operatorname{rot} \vec{H}_* = (\sigma + i\omega \varepsilon) \vec{E}_*, \operatorname{rot} \vec{E}_* = -i\omega \mu \vec{H}_*, \operatorname{div} \vec{H}_* = 0, \operatorname{div} \vec{E}_* = 0,$$

$$\text{rot } \vec{H}_*^{(0)} = i\omega\varepsilon_0 \vec{E}_*^{(0)} + \vec{j}_*^{(0)}, \text{ rot } \vec{E}_*^{(0)} = -i\omega\mu_0 \vec{H}_*^{(0)}, \text{ div } \vec{H}_*^{(0)} = 0, \text{ div } \vec{E}_*^{(0)} = 0. \quad (27)$$

Враховуючи, що для довільного вектора  $\vec{\psi}$  справедлива рівність  $\text{rot rot } \vec{\psi} = \Delta \vec{\psi} + \text{grad div } \vec{\psi}$ , з рівнянь (27) отримаємо

$$\Delta \vec{E}_* + k^2 \vec{E}_* = 0, \text{ div } \vec{E}_* = 0, \quad (28)$$

$$\Delta \vec{E}_*^{(0)} + k_0^2 \vec{E}_*^{(0)} = i\omega\mu_0 \vec{j}_*^{(0)}, \text{ div } \vec{E}_*^{(0)} = 0, \quad (29)$$

де введено позначення

$$k^2 = \omega\mu(\varepsilon\omega - i\sigma), k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0. \quad (30)$$

Аналогічні рівняння можна отримати й відносно комплексних амплітуд напруженостей магнітного поля

$$\Delta \vec{H}_* + k^2 \vec{H}_* = 0, \text{ div } \vec{H}_* = 0, \quad (31)$$

$$\Delta \vec{H}_*^{(0)} + k_0^2 \vec{H}_*^{(0)} = -\text{rot } \vec{j}_*^{(0)}, \text{ div } \vec{H}_*^{(0)} = 0. \quad (32)$$

При розв'язуванні конкретних задач визначення усталеного електромагнітного поля в електропровідних тілах струмами зміщення в області електропровідного тіла зазвичай нехтують [1], бо вони малі порівняно зі струмами провідності. В цьому випадку рівняння залишаються без зміни, тільки коефіцієнт  $k^2$  визначається за формулою

$$k^2 = -i\omega\mu\sigma. \quad (33)$$

Якщо амплітуда зовнішніх струмів для квазіусталеного режиму постійна в часі й дорівнює одиниці (тобто  $j(t)=1$  у залежностях (24), (26)), то отримаємо представлення шуканих функцій для усталеного електромагнітного поля [1]. При цьому система вихідних рівнянь для знаходження цих функцій не зміниться.

Для індукційного оброблення поверхні колеса будемо використовувати кільцевий індуктор. Тоді вектор зовнішнього струму можна записати

$$\vec{j}^{(0)}(r, z, t) = (0, j_{\varphi}^{(0)}(r, z, t), 0), \quad (34)$$

де  $(r, z)$  – циліндричні координати. Для усталеного режиму аналогічно можна записати

$$\vec{j}_*^{(0)}(r, z) = (0, j_{\varphi*}^{(0)}(r, z), 0). \quad (35)$$

Якщо колесо ізотропне, то комплексну амплітуду напруженості електричного поля запишемо аналогічно

$$\vec{E}_*(r, z) = (0, E_{\varphi*}(r, z), 0). \quad (36)$$

Тобто вектор напруженості електричного поля має тільки одну кільцеву складову. Можна показати [2], що комплексну амплітуду напруженості магнітного поля тоді запишемо так

$$\vec{H}_*(r, z) = (H_r(r, z), 0, H_z(r, z)). \quad (37)$$

Тобто вектор напруженості магнітного поля має дві складові – радіальну й осьову.

Надалі для розв’язування задачі будемо використовувати систему рівнянь (28), (29), тобто в якості розрахункової функції використаємо напруженість електричного поля.

Лапласіан вектора  $\vec{E}$  в циліндричній системі координат визначається за формулою

$$\Delta \vec{E} = \left[ \Delta E_r - \frac{E_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_r + \left[ \Delta E_\varphi - \frac{E_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_\varphi + \Delta E_z \vec{e}_z, \quad (38)$$

де позначено

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \text{лапласіан скаляра}. \quad (39)$$

Проектуючи перші з рівнянь (28), (29) на напрямок  $\vec{e}_\varphi$  і враховуючи осьову симетрію задачі, отримаємо

$$\frac{\partial^2 E_{\varphi^*}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_{\varphi^*}}{\partial r} - \frac{E_{\varphi^*}}{r^2} + \frac{\partial^2 E_{\varphi^*}}{\partial z^2} + k^2 E_{\varphi^*} = 0, \quad (40)$$

$$\frac{\partial^2 E_{\varphi^{(0)}}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_{\varphi^{(0)}}}{\partial r} - \frac{E_{\varphi^{(0)}}}{r^2} + \frac{\partial^2 E_{\varphi^{(0)}}}{\partial z^2} + k_0^2 E_{\varphi^{(0)}} = i\omega\mu_0 J_{\varphi^{(0)}}. \quad (41)$$

Розглянемо довгий суцільний циліндр радіуса  $R_0$ , вісь симетрії якого співпадає з віссю  $z$ . Циліндр вміщений у коаксіальний з ним індуктор радіусом  $R_1$  і довжиною  $2h$ .

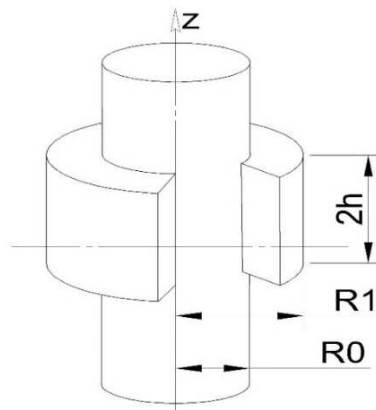


Рисунок 1. Схематичне зображення циліндра та індуктора

Figure 1. Schematic picture of the cylinder and inductor

Приймаємо, що густина струму в індукторі має тільки кутову складову і постійна по висоті, тобто

$$\vec{j}_{\varphi}(r, z, t) = j_0 \delta(r - R_1) N(z) e^{i\omega t}, \quad (42)$$

$$\text{де } N(z) = S_-(z + h) - S_+(z - h), \quad (43)$$

$\delta(r - R_1)$  – дельта-функція,  $S_{\pm}(x)$  – асиметричні одиничні функції.

$$S_{\pm}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0,5 \mp 0,5, & x = 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (44)$$

Тоді напруженість електричного поля в області циліндра і поза ним також будуть мати відмінною від нуля тільки кутову складову, яку запишемо

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\varphi}(r, z, t) &= E_{\varphi^*}(z, r) e^{i\omega t}, \\ \vec{E}_{\varphi}^{(0)}(r, z, t) &= E_{\varphi^*}^{(0)}(z, r) e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (45)$$

причому функції  $E_{\varphi^*}$  і  $E_{\varphi^*}^{(0)}$  задовольняють рівнянням (40), (41), в яких функція  $j_{\varphi^*}^{(0)}$  визначається згідно з формулою (42)

$$j_{\varphi^*}^{(0)} = j_0 \delta(r - R_1) N(z).$$

Надалі будемо опускати нижні індекси  $\varphi^*$  у позначеннях комплексних амплітуд і рівняння для їх визначення набувають вигляду

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + k^2 - \frac{1}{r^2} \right) E = 0, \quad 0 < r < R_0, \quad (46)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + k_0^2 - \frac{1}{r^2} \right) E^{(0)} = i\omega\mu_0 j_0 \delta(r - R_1) N(z), \quad r > R_0. \quad (47)$$

На границі розділу  $r > R_0$  повинні виконуватися умови спряження електромагнітного поля в області циліндра з електромагнітним полем поза його межами. Ці умови при  $r = R_0$  запишемо [1]

$$E = E^{(0)}, \quad (48)$$



$$\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{1}{r} E \right) = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\partial E^{(0)}}{\partial r} + \frac{1}{r} E^{(0)} \right). \quad (49)$$

Останні умови отримуються з умов (22). Справді, якщо позначити вектор одиничної нормалі до поверхні тіла через  $\vec{n}$ , то умови (22) можна записати

$$\vec{n} \times \left( \vec{E} - E^{(0)} \right) = 0, \quad \vec{n} \times \left( \vec{H} - H^{(0)} \right) = 0. \quad (50)$$

Виходячи з рівнянь (27), знайдемо  $\vec{H} - H^{(0)} = -\frac{1}{i\omega} \left( \frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \text{rot} E^{(0)} \right)$ .

Отже, друга умова неперервності (50) набуде вигляду

$$\vec{n} \times \left( \frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \text{rot} E^{(0)} \right) = 0. \quad (51)$$

Так як вектор  $\vec{H}$  має тільки радіальну й осьову компоненти (37), то вектор  $\frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \text{rot} E^{(0)}$  також має тільки радіальну й осьову компоненти. Нагадаємо, що вектор  $\text{rot} \vec{E}$  в циліндричній системі координат записується [3]

$$\text{rot} \vec{E} = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right] \vec{e}_r + \left[ \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right] \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (r E_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_z. \quad (52)$$

Враховуючи, що вектор  $\vec{E}$  має відмінною від нуля тільки кутову складову  $E_\varphi$  і має місце осьова симетрія, то в нашому випадку

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial E}{\partial z} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E) \vec{e}_z, \quad (53)$$

тобто 
$$\left( \frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \text{rot} E^{(0)} \right)_r = -\left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial E}{\partial z} - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial E^{(0)}}{\partial z} \right),$$

$$\left( \frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \text{rot} E^{(0)} \right)_z = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{1}{r} E \right) - \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\partial E^{(0)}}{\partial r} + \frac{E^{(0)}}{r} \right).$$

Отже

$$\frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \text{rot} E^{(0)} = - \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial E}{\partial z} - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial E^{(0)}}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left[ \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{1}{r} E \right) - \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\partial E^{(0)}}{\partial r} + \frac{E^{(0)}}{r} \right) \right] \vec{e}_z.$$

Одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні циліндра (в загальному випадку обмеженої довжини) можна записати у вигляді  $\vec{n} = n_r \vec{e}_r + n_z \vec{e}_z$ . Таким чином, перша умова (50) набуде вигляду

$$\vec{n} \times \left( \vec{E} - E^{(0)} \right) = \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ n_r & 0 & n_z \\ 0 & E - E^{(0)} & 0 \end{vmatrix} = - (E - E^{(0)}) n_z \vec{e}_r + (E - E^{(0)}) n_r \vec{e}_z = 0,$$

звідки випливає умова (48). Умову неперервності (51) запишемо

$$\vec{n} \times \left( \frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \text{rot} E^{(0)} \right) = \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ n_r & 0 & n_z \\ - \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial E}{\partial z} - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial E^{(0)}}{\partial z} \right) & 0 & \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{1}{r} E \right) - \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\partial E^{(0)}}{\partial r} + \frac{E^{(0)}}{r} \right) \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{e}_\varphi \left\{ -n_r \left[ \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{1}{r} E \right) - \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\partial E^{(0)}}{\partial r} + \frac{E^{(0)}}{r} \right) \right] - n_z \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial E}{\partial z} - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial E^{(0)}}{\partial z} \right) \right\} = 0.$$

Звідси випливає умова [2]

$$\left[ \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{1}{r} E \right) - \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\partial E^{(0)}}{\partial r} + \frac{E^{(0)}}{r} \right) \right] n_r + \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial E}{\partial z} - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial E^{(0)}}{\partial z} \right) n_z = 0. \quad (54)$$

На бічній поверхні циліндра  $n_z = 0$  отримуємо (49).

У випадку циліндра кінцевої довжини на поверхні  $z = const$  маємо  $n_r = 0$ . Тому на таких поверхнях умова спряження набуде вигляду

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial E^{(0)}}{\partial z}. \quad (55)$$

Функція  $E^{(0)}$  повинна задовольняти також умову випромінювання на нескінченності, яка має вигляд [1]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} E^{(0)}(r, z) = \text{const}; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \left[ \frac{\partial E^{(0)}}{\partial r} + ik_0 E^{(0)} \right] = 0. \quad (56)$$

Для розв'язування поставленої задачі використаємо інтегральне перетворення Фур'є по  $z$

$$\tilde{E}(r, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(r, z) e^{iz\xi} dz, \quad (57)$$

$$E(r, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(r, \xi) e^{-iz\xi} d\xi. \quad (58)$$

Застосувавши інтегральне перетворення (57) до рівнянь (46), (47) і умов спряження, отримаємо

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \chi^2 - \frac{1}{r^2} \right) \tilde{E}(r, \xi) = 0, \quad 0 < r < R_0 \quad (59)$$

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \chi_0^2 - \frac{1}{r^2} \right) \tilde{E}^{(0)}(r, \xi) = i\omega\mu_0 j_0 \delta(r - R_1) \tilde{N}(\xi), \quad r > R_0 \quad (60)$$

$$\tilde{E} = \tilde{E}^{(0)}, \quad \frac{1}{\mu} \left( \frac{d\tilde{E}}{dr} + \frac{\tilde{E}}{r} \right) = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{d\tilde{E}_0}{dr} + \frac{\tilde{E}^{(0)}}{r} \right), \quad r = R_0, \quad (61)$$

де

$$\chi_0^2 = k_0^2 - \xi^2, \quad \chi^2 = k^2 - \xi^2, \quad (62)$$

$$\tilde{N}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} N(z) e^{iz\xi} dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \xi h}{\xi}. \quad (63)$$

Умови випромінювання (56) після застосування інтегрального перетворення набувають вигляду

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{E}^{(0)}(r, \xi) = \text{const}; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \left[ \frac{\partial \tilde{E}^{(0)}}{\partial r} + ik_0 \tilde{E}^{(0)} \right] = 0. \quad (64)$$

Зведемо контактну задачу (59) – (61) до крайової задачі для області циліндра. Знайдемо спочатку загальний розв'язок рівняння (60), який запишемо у вигляді

$$\tilde{E}^{(0)} = \tilde{E}_1^{(0)} + \tilde{E}_2^{(0)}, \quad (65)$$

де  $\tilde{E}_1^{(0)}$  – загальний розв’язок однорідного рівняння (60);  $\tilde{E}_2^{(0)}$  – частковий розв’язок неоднорідного рівняння (60).

Загальний розв’язок однорідного рівняння (60) має вигляд

$$\tilde{E}_1^{(0)} = C_1 H_1^{(1)}(\chi_0 r) + C_2 H_1^{(2)}(\chi_0 r), \quad (66)$$

де  $H_1^{(1)}(\chi_0 r)$  і  $H_1^{(2)}(\chi_0 r)$  – функції Ханкеля, які виражаються через функції Бесселя першого і другого роду за формулами

$$\begin{aligned} H_n^{(1)}(z) &= J_n(z) + iY_n(z), \\ H_n^{(2)}(z) &= J_n(z) - iY_n(z). \end{aligned} \quad (67)$$

Розв’язок неоднорідного рівняння (60) шукаємо за методом варіації постійної у вигляді

$$\tilde{E}_2^{(0)} = A(r)H_1^{(1)}(\chi_0 r) + B(r)H_1^{(2)}(\chi_0 r). \quad (68)$$

Для знаходження невідомих функцій  $A(r)$  і  $B(r)$  отримаємо систему рівнянь

$$\frac{dA}{dr} H_1^{(1)}(\chi_0 r) + \frac{dB}{dr} H_1^{(2)}(\chi_0 r) = 0,$$

$$\frac{dA}{dr} \left[ \chi_0 H_0^{(1)}(\chi_0 r) - \frac{1}{r} H_1^{(1)}(\chi_0 r) \right] + \frac{dB}{dr} \left[ \chi_0 H_0^{(2)}(\chi_0 r) - \frac{1}{r} H_1^{(2)}(\chi_0 r) \right] = i\omega\mu_0 j_0 \tilde{N}(\xi) \delta(r - R_1).$$

Визначник цієї системи дорівнює

$$\Delta = \chi_0 \left[ H_1^{(1)}(\chi_0 r) H_0^{(2)}(\chi_0 r) - H_0^{(1)}(\chi_0 r) H_1^{(2)}(\chi_0 r) \right].$$

Враховуючи, що в квадратних дужках маємо вронскіан, який дорівнює [5]

$$H_{\nu+1}^{(1)}(z) H_{\nu}^{(2)}(z) - H_{\nu}^{(1)}(z) H_{\nu+1}^{(2)}(z) = -\frac{4i}{\pi z},$$

знайдемо  $\Delta = -\frac{4i}{\pi r}$ .

Отже,

$$\frac{dA}{dr} = \frac{1}{4} \omega\mu_0 j_0 \pi r H_1^{(2)}(\chi_0 r) \tilde{N}(\xi) \delta(r - R_1), \quad (69)$$

$$\frac{dB}{dr} = -\frac{1}{4} \omega\mu_0 j_0 \pi r H_1^{(1)}(\chi_0 r) \tilde{N}(\xi) \delta(r - R_1).$$

Знайдемо розв’язки рівнянь (69), які при  $r = \infty$  дорівнюють нулю. Отримаємо

$$A(r) = -\frac{\pi}{4} \omega \mu_0 j_0 R_1 H_1^{(2)}(\chi_0 R_1) \tilde{N}(\xi) [1 - \theta(r - R_1)],$$

$$B(r) = \frac{\pi}{4} \omega \mu_0 j_0 R_1 H_1^{(1)}(\chi_0 R_1) \tilde{N}(\xi) [1 - \theta(r - R_1)],$$
(70)

де  $\theta(x)$  – одинична функція скачка.

Легко прямою підстановкою розв’язку (68), коли  $A(r)$  і  $B(r)$  визначаються за формулами (70), переконатися, що рівняння (60) задовольняється.

Для задоволення умов випромінювання покладемо в (66)  $C_2 = 0$  і запишемо загальний розв’язок рівняння (60) так:

$$\tilde{E}^{(0)}(\xi, r) = [C_1 + A(r)] H_1^{(1)}(\chi_0 r) + B(r) H_1^{(2)}(\chi_0 r).$$
(71)

Для того, щоб звести контактну задачу до крайової, підставимо розв’язок (71) в умови контакту (61). Знайдемо

$$\tilde{E}(\xi, R_0) = \left[ C_1 - \frac{\pi}{4} \omega \mu_0 j_0 R_1 H_1^{(2)}(\chi_0 R_1) \tilde{N}(\xi) \right] H_1^{(1)}(\chi_0 R_0) + \frac{\pi}{4} \omega \mu_0 j_0 R_1 H_1^{(1)}(\chi_0 R_1) \tilde{N}(\xi) H_1^{(2)}(\chi_0 R_0),$$

$$\frac{d\tilde{E}}{dr}(\xi, R_0) + \frac{1}{R_0} \tilde{E}(\xi, R_0) = \frac{\mu}{\mu_0} x_0 \left\{ \left[ C_1 - \frac{\pi}{4} \omega \mu_0 j_0 R_1 H_1^{(2)}(\chi_0 R_1) \tilde{N}(\xi) \right] H_0^{(1)}(\chi_0 R_0) + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi}{4} \omega \mu_0 j_0 R_1 H_1^{(1)}(\chi_0 R_1) \tilde{N}(\xi) H_0^{(2)}(\chi_0 R_0) \right\}.$$

Зауважимо, що тут використано відоме співвідношення  $f(z)\delta(z - z_1) = \frac{1}{2}[f(z - 0) + f(z + 0)]\delta(z - z_1)$ , яке для неперервної в точці  $z_1$  функції  $f(z)$  запишемо  $f(z)\delta(z - z_1) = f(z_1)\delta(z - z_1)$ .

Виключивши з отриманих рівнянь постійну  $C_1$ , знайдемо крайову умову при  $r = R_0$

$$H_1^{(1)}(\chi_0 R_0) \frac{d\tilde{E}}{dr}(\xi, R_0) + \tilde{E}(\xi, R_0) \left[ \frac{H_1^{(1)}(\chi_0 R_0)}{R_0} - \frac{\mu \chi_0}{\mu_0} H_0^{(1)}(\chi_0 R_0) \right] =$$

$$= -i \frac{R_1}{R_0} \mu \omega j_0 \tilde{N}(\xi) H_1^{(1)}(\chi_0 R_1).$$
(72)

Загальний розв’язок рівняння (59) в області циліндра має вигляд

$$\tilde{E}(\xi, r) = D_1 J_1(\chi r) + D_2 Y_1(\chi r).$$
(73)

Враховуючи обмеженість розв’язку при  $r = 0$ , покладемо  $D_2 = 0$ . Постійну  $D_1$  знаходимо з умови (72). Остаточний розв’язок (73) запишемо

$$\tilde{E}(\xi, r) = \frac{i \frac{R_1}{R_0} \mu_0 \mu \omega j_0 H_1^{(1)}(\chi_0 R_1) J_1(\chi r) \tilde{N}(\xi)}{\mu \chi_0 J_1(\chi R_0) H_0^{(1)}(\chi_0 R_0) - \mu_0 \chi J_0(\chi R_0) H_1^{(1)}(\chi_0 R_0)}. \quad (74)$$

Цей розв'язок для зображення напруженості електричного поля в області циліндра співпадає з розв'язком, отриманим у роботі [1].

Напруженість електричного поля в області циліндра знаходимо за формулою (58). Враховуючи (63), знайдемо

$$E(r, z) = \frac{R_1}{\pi R_0} \mu_0 \mu \omega j_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i \sin(\xi h) H_1^{(1)}(\chi_0 R_1) J_1(\chi r) e^{-iz\xi}}{\xi [\mu \chi_0 J_1(\chi R_0) H_0^{(1)}(\chi_0 R_0) - \mu_0 \chi J_0(\chi R_0) H_1^{(1)}(\chi_0 R_0)]} d\xi.$$

Значного спрощення можна домогтися тоді, коли індуктор, як і циліндрична деталь, нескінченної довжини. В цьому випадку  $N(z) = 1$  і

$$\tilde{N}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi z} dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sin a\xi}{\xi} = \sqrt{2\pi} \delta(\xi). \text{ Тоді}$$

$$E(r, z) = i \frac{R_1}{R_0} \mu_0 \mu \omega j_0 \frac{H_1^{(1)}(k_0 R_1) J_1(kr)}{\mu k_0 J_1(k R_0) H_0^{(1)}(k_0 R_0) - \mu_0 k J_0(k R_0) H_1^{(1)}(k_0 R_0)}, \quad (75)$$

де  $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ ,  $k = \frac{k^*}{\sqrt{2}} (1 - i)$ ,  $k^* = \sqrt{\omega \mu \sigma}$ . (76)

Можна показати, що

$$\begin{aligned} J_1(kr) &= -[ber_1(k^* r) + ibei_1(k^* r)], \\ J_1(kR_0) &= -[ber_1(k^* R_0) + ibei_1(k^* R_0)], \\ J_0(kR_0) &= ber(k^* R_0) + ibei(k^* R_0), \end{aligned} \quad (77)$$

де  $ber_n(x)$ ,  $bei_n(x)$  – функції Кельвіна. Якщо  $n = 0$ , то індекс 0 опускається. Функції Ханкеля  $H_0^{(1)}$ ,  $H_1^{(1)}$  на основі (67) запишемо

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(k_0 R_0) &= J_0(k_0 R_0) + iY_0(k_0 R_0), \\ H_1^{(1)}(k_0 R_1) &= J_1(k_0 R_1) + iY_1(k_0 R_1), \\ H_1^{(1)}(k_0 R_0) &= J_1(k_0 R_0) + iY_1(k_0 R_0). \end{aligned} \quad (78)$$

Зауважимо, що всі функції, які входять у праві частини формул (77), (78), залежать від дійсного аргументу і набувають дійсних значень. Напруженість електричного поля в області циліндра з урахуванням (77), (78) запишемо у вигляді

$$E(r) = \frac{\mu_0 \mu \omega R_1 j_0}{R_0 (e^2 + g^2)} \{ eA(r) + gB(r) + i [eB(r) - gA(r)] \}, \quad (79)$$

де введено позначення

$$a_{mn} = ber_m(k^* R_0) J_n(k_0 R_0) - bei_m(k^* R_0) Y_n(k_0 R_0),$$

$$b_{mn} = bei_m(k^* R_0) J_n(k_0 R_0) + ber_m(k^* R_0) Y_n(k_0 R_0),$$

$$e = \mu k_0 a_{10} + \frac{\mu_0 k^*}{\sqrt{2}} (a_{10} + b_{01}),$$

$$g = \mu k_0 b_{10} + \frac{\mu_0 k^*}{\sqrt{2}} (b_{01} - a_{01}),$$

$$A(r) = - \left[ Y_1(k_0 R_1) ber_1(k^* r) + J_1(k_0 R_1) bei_1(k^* r) \right],$$

$$B(r) = J_1(k_0 R_1) ber_1(k^* r) - Y_1(k_0 R_1) bei_1(k^* r).$$

Потужність джерел тепловиділення знаходимо за формулою

$$Q(r) = \frac{\sigma}{2} E(r) \bar{E}(r) = \frac{\sigma (\mu_0 \mu \omega R_1 j_0)^2}{2 R_0^2 (e^2 + g^2)} [A^2(r) + B^2(r)].$$

У процесі індукційного нагріву циліндра відбувається зростання температури приповерхневого шару і в деякий момент часу з'являється область, температура в якій перевищує температуру Кюрі (близько 770°C).

В такій області магнітна проникливість матеріалу різко падає і стає близькою до магнітної проникливості вакууму. В зв'язку з цим розглянемо випадок, коли можна вважати циліндр двошаровим. В області I ( $R_k \leq r \leq R_0$ ) магнітна проникливість і питома об'ємна провідність  $\mu_1$  і  $\sigma_1$ , а в області II ( $0 \leq r \leq R_k$ ) – відповідно  $\mu_2$  і  $\sigma_2$ . У технічних розрахунках, як правило, приймають  $\mu_1 = \mu_0$ , а  $\mu_2 = \mu$ , де  $\mu$  – значення магнітної проникливості матеріалу до втрати ним феромагнітних властивостей [4]. Значення питомої об'ємної провідності в технічних розрахунках приймають  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ .

Рівняння для визначення комплексної амплітуди напруженостей електричного поля в області вакууму залишається без зміни у вигляді (47), а в областях (I) і (II) циліндра отримуємо рівняння

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + k_i^2 - \frac{1}{r^2} \right) E^{(i)} = 0, \quad k_i^2 = -i \mu_i \omega \sigma, \quad (80)$$

$i = 1$ , якщо  $R_k \leq r \leq R_0$ ,

$i = 2$ , якщо  $0 \leq r \leq R_k$ .

Умови обмеженості розв'язку при  $r = 0$  і випромінювання на нескінченності залишаються без зміни. Умови спряження електромагнітного поля при  $r = R_0$  набудуть вигляду

$$E^{(1)} = E^{(0)},$$

$$\frac{1}{\mu_1} \left( \frac{\partial E^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{r} E^{(1)} \right) = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\partial E^{(0)}}{\partial r} + \frac{1}{r} E^{(0)} \right), \text{ при } r = R_0. \quad (81)$$

Аналогічні умови спряження повинні виконуватися на границі  $r = R_k$

$$E^{(2)} = E^{(1)},$$

$$\frac{1}{\mu_2} \left( \frac{\partial E^{(2)}}{\partial r} + \frac{1}{r} E^{(2)} \right) = \frac{1}{\mu_1} \left( \frac{\partial E^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{r} E^{(1)} \right), \text{ при } r = R_k. \quad (82)$$

Застосовуючи інтегральне перетворення (57) до рівнянь (80) і умов спряження, дійдемо до наступної крайової задачі для зображення напруженості електричного поля в області циліндра

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \chi_i^2 - \frac{1}{r^2} \right) \tilde{E}^{(i)}(r, \xi) = 0, \quad \chi_i^2 = k_i^2 - \xi^2, \quad (83)$$

$i = 1$ , якщо  $R_k \leq r \leq R_0$ ;  $i = 2$ , якщо  $0 \leq r \leq R_k$ ,  $\tilde{E}^{(2)}(0, \xi)$  – обмежене.

$$\frac{1}{\mu_2} \left( \frac{d\tilde{E}^{(2)}}{dr} + \frac{1}{r} \tilde{E}^{(2)} \right) = \frac{1}{\mu_1} \left( \frac{d\tilde{E}^{(1)}}{dr} + \frac{1}{r} \tilde{E}^{(1)} \right), \text{ при } r = R_k. \quad (84)$$

$$H_1^{(1)}(\chi_0 R_0) \frac{d\tilde{E}^{(1)}}{dr}(\xi, R_0) + \tilde{E}^{(1)}(\xi, R_0) \left[ \frac{H_1^{(1)}(\chi_0 R_0)}{R_0} - \frac{\mu_1 \chi_0}{\mu_0} H_0^{(1)}(\chi_0 R_0) \right] = -i \frac{R_1}{R_0} \mu_1 \omega j_0 \tilde{N}(\xi) H_1^{(1)}(\chi_0 R_1),$$

Загальний розв'язок в областях I і II має вигляд

$$\tilde{E}^{(i)}(\xi, r) = C_1^{(i)} J_1(\chi_i r) + C_2^{(i)} Y_1(\chi_i r), \quad i = 1, 2.. \quad (85)$$

Враховуючи обмеженість розв'язку при  $r = 0$ , покладемо  $C_2^{(2)} = 0$ . Задовольняючи умови (84), знайдемо

$$\tilde{E}^{(1)}(\xi, r) = \frac{i \frac{R_1}{R_0} \mu_1 \omega j_0 \tilde{N}(\xi) H_1^{(1)}(\chi_0 R_1)}{\tilde{\Delta}} \left[ \tilde{F}_1 J_1(\chi_1 r) - \tilde{F}_2 Y_1(\chi_1 r) \right], \quad (86)$$



$$\tilde{E}^{(2)}(\xi, r) = \frac{i \frac{R_1}{R_0} \mu_1 \omega j_0 \tilde{N}(\xi) H_1^{(1)}(\chi_0 R_1)}{\tilde{\Delta}} \left[ \tilde{F}_1 J_1(\chi_1 R_k) - \tilde{F}_2 Y_1(\chi_1 R_k) \right] \frac{J_1(\chi_2 r)}{J_1(\chi_2 R_k)}, \quad (87)$$

де позначено

$$\tilde{\Delta} = \tilde{M}_1 \tilde{F}_2 - \tilde{M}_2 \tilde{F}_1,$$

$$\tilde{F}_1 = \chi_2 \mu_1 Y_1(\chi_1 R_k) J_0(\chi_2 R_k) - \chi_1 \mu_2 Y_0(\chi_1 R_k) J_1(\chi_2 R_k),$$

$$\tilde{F}_2 = \chi_2 \mu_1 J_1(\chi_1 R_k) J_0(\chi_2 R_k) - \chi_1 \mu_2 J_0(\chi_1 R_k) J_1(\chi_2 R_k), \quad (88)$$

$$\tilde{M}_1 = \chi_1 \mu_0 H_1^{(1)}(\chi_0 R_0) Y_0(\chi_1 R_0) - \chi_0 \mu_1 H_0^{(1)}(\chi_0 R_0) Y_1(\chi_1 R_0),$$

$$\tilde{M}_2 = \chi_1 \mu_0 H_1^{(1)}(\chi_0 R_0) J_0(\chi_1 R_0) - \chi_0 \mu_1 H_0^{(1)}(\chi_0 R_0) J_1(\chi_1 R_0).$$

Напруженість електричного поля в області циліндра отримуємо згідно з формулою (58). Якщо індуктор безмежної довжини, то напруженість електричного поля в області циліндра набуде вигляду

$$E^{(1)}(r) = \frac{i \frac{R_1}{R_0} \mu_1 \omega j_0 H_1^{(1)}(k_0 R_1)}{\Delta} \left[ F_1 J_1(k_1 r) - F_2 Y_1(k_1 r) \right], \quad (89)$$

$$E^{(2)}(r) = \frac{i \frac{R_1}{R_0} \mu_1 \omega j_0 H_1^{(1)}(k_0 R_1)}{\tilde{\Delta}} \left[ F_1 J_1(k_1 R_k) - F_2 Y_1(k_1 R_k) \right] \frac{J_1(k_2 r)}{J_1(k_2 R_k)}, \quad (90)$$

$$\Delta = M_1 F_2 - M_2 F_1,$$

$$F_1 = k_2 \mu_1 Y_1(k_1 R_k) J_0(k_2 R_k) - k_1 \mu_2 Y_0(k_1 R_k) J_1(k_2 R_k),$$

$$F_2 = k_2 \mu_1 J_1(k_1 R_k) J_0(k_2 R_k) - k_1 \mu_2 J_0(k_1 R_k) J_1(k_2 R_k), \quad (91)$$

$$M_1 = k_1 \mu_0 H_1^{(1)}(k_0 R_0) Y_0(k_1 R_0) - k_0 \mu_1 H_0^{(1)}(k_0 R_0) Y_1(k_1 R_0),$$

$$M_2 = k_1 \mu_0 H_1^{(1)}(k_0 R_0) J_0(k_1 R_0) - k_0 \mu_1 H_0^{(1)}(k_0 R_0) J_1(k_1 R_0).$$

Питому потужність джерел тепловиділення обчислюємо, як і в попередньому випадку, за формулою

$$Q(r) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2} E^{(1)}(r) \bar{E}^{(1)}(r), & R_k \leq r \leq R_0, \\ \frac{\sigma}{2} E^{(2)}(r) \bar{E}^{(2)}(r), & 0 \leq r \leq R_k. \end{cases} \quad (92)$$

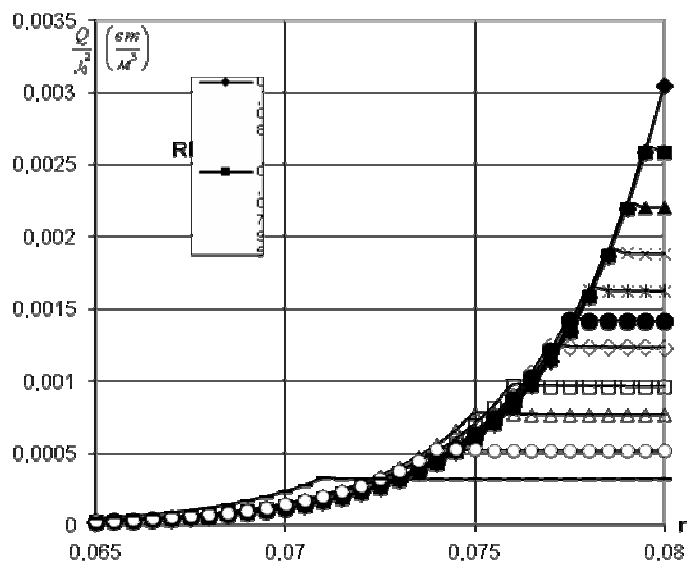


Рисунок 2. Залежність потужності джерел тепла від радіуса циліндра

Figure 2. Dependence of heat sources on cylinder radius

На рис.2 наведено графіки залежності питомої потужності джерел тепла, віднесеної до квадрата густини струму в індукторі, від радіуса циліндра для різних значень  $R_k$ . Розрахунки виконані для циліндра радіусом  $R_0 = 0.08\text{ м.}$ , радіус індуктора

$R_1 = 0.082\text{ м.}$ ,  $\mu = 16\mu_0$ ,  $\sigma = \frac{1}{11 \cdot 10^{-8}} \frac{\text{См}}{\text{м}}$ . Зі збільшенням товщини шару матеріалу,

прогрітого вище температури Кюрі (зменшенням  $R_k$ ), питома потужність джерел зменшується і максимум тепловиділення переміщується вглиб циліндра.

**Висновок.** За допомогою розробленої математичної моделі проведено дослідження залежності питомої потужності теплових джерел від частоти і сили струму в індукторі й тривалості нагрівання.

Розроблено математичну модель для визначення питомої потужності теплових джерел, які виникають у результаті індукційного нагріву масивних циліндричних тіл. Такий нагрів використовується в технологічних процесах відновлення експлуатаційних властивостей коліс залізничного транспорту методом нарощування їхньої робочої поверхні за допомогою заливки рідкого металу і схоплення його з підготовленою для відновлення поверхнею.

Conclusions. Applying the developed mathematical model, the investigation for the dependency of heat source specific power on the frequency and current strength in the inductor and heating duration has been conducted.

A mathematical model to determine the specific power of heat sources resulting from the induction heating of huge cylindrical bodies has been developed. This type of heating is applied in industrial processes for the recuperating of rail transport wheels performance characteristics by the method of growing their working surface and pouring with a liquid metal and connection of it with prepared for recuperation surface.

#### Список використаної літератури

1. Подстригач, Я.С. Термоупругость электропроводных тел [Текст] / Я.С. Подстригач, Я.И. Бурак, А.Р. Гачкевич, Л.В. Чернявская. – К.: Наукова думка, 1977. – 247 с.
2. Гачкевич, О. Математичне моделювання процесу індукційного нагрівання електропровідних тіл [Текст] / О. Гачкевич, Б. Дробенко // Вісник Львівського ун-ту. – 2004. – №8. – С.97–111.
3. Гольдфайн, И.А. Векторный анализ и теория поля [Текст] / И.А. Гольдфайн. – М.: Наука, 1968. – 128 с.
4. Слухоцкий, А.Е. Установки индукционного нагрева [Текст] / А.Е. Слухоцкий. – Л.: Энергоиздат, Ленинградское отделение, 1981. – 325 с.
5. Абрамовиц, М. Справочник по специальным функциям [Текст] / М.Абрамовиц, И.Стиган. – М.: Наука, 1979. – 830 с.

Отримано 29.10.2014