

УДК [519.876.5:530.182]:553.98

С. Ярошак, канд. техн. наук

Рівненський державний гуманітарний університет

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ВИТІСНЕННЯ НАФТИ В НЕОДНОРІДНИХ ПЛАСТАХ ІЗ УРАХУВАННЯМ ВПЛИВУ КАПІЛЯРНИХ СИЛ

*Резюме.* Числові методи комплексного аналізу дослідження нелінійних процесів витіснення флюїдів узагальнено на випадок протікання процесу в неоднорідних нафтогазових пластах. При цьому враховано вплив капілярних сил та можливість існування тріщин гідравлічного розриву.

*Ключові слова:* капілярні сили, багатофазна фільтрація, квазіконформне відображення, гідравлічний розрив, числовий метод.

S. Yaroschak

## MATHEMATICAL SIMULATION OF OIL DISPLACEMENT IN HETEROGENEOUS RESERVOIRS TAKING INTO ACCOUNT THE INFLUENCE OF CAPILLARY FORCES

*Summary.* Numerical methods of complex analysis study of nonlinear processes of fluid displacement is generalized in the case of heterogeneous oil and gas reservoirs and with the consideration of the influence of capillary forces and the possibility of cracks occurring in hydraulic fracturing. In the statement of the problem of multiphase filtration the dynamic viscosity phases are constant, the fluid movement is slow and occurs without phase transitions, the relative phase permeability and capillary pressure are known functions of saturation. In order to use the main ideas of the developed integrated approach the quasipotential of speed and complex conjugated to it the stream function is introduced, basing on which the basic characteristics of the analyzed process (pressure, speed phases, discharge of well, etc.) are calculated. The existence of the stream is caused by the conditions of the continuity of the multiphase flow. The introduction of the complex conjugated functions made possible to come from the task for building the hydrodynamic grid, searching the discharge of wells and other characteristic of filtrational parameters for the known field saturation (fixed at this moment of time) to more general tasks of quasiconformal mapping of the physical area (an area of process) in the appropriate area of complex quasipotential (parametric rectangle). According to the basic ideas of the integrated approach the transition to the reverse mapping has been done and the appropriate inverse problem has been stated. In the area of complex potential the uniform orthogonal grid has been introduced according to which the approximation of inverse problem solution has been done. The algorithm of its solution has been developed which is based on the basic principles of quasiconformal mappings and ideas of stage-by-stage fixing characteristics of environment and process.

*Key words:* capillary forces, multiphase filtering, quasiconformal mapping, hydraulic fracturing, numerical method.

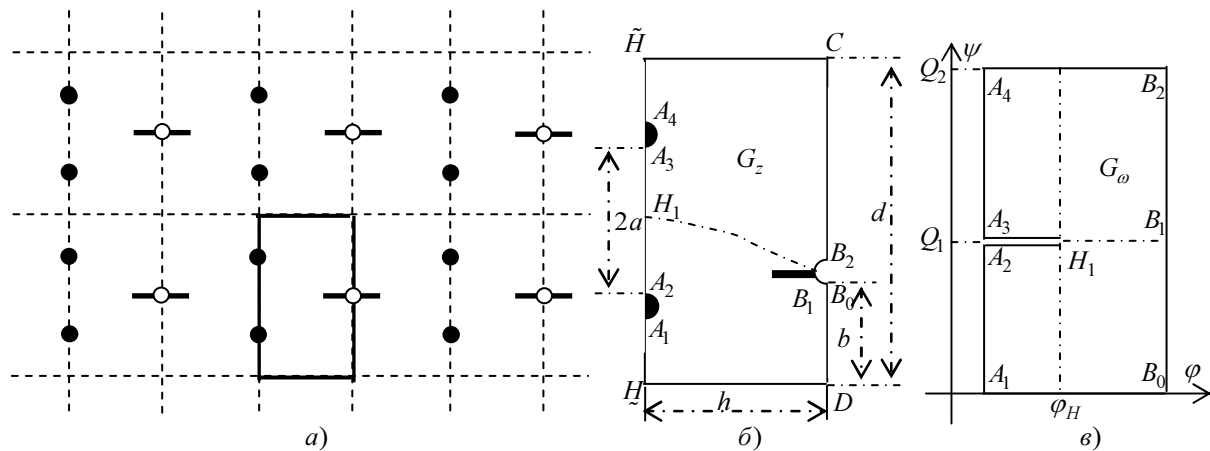
**Вступ.** Однією з важливих технологій інтенсифікації процесу розроблення нафтогазових родовищ є гідравлічний розрив пласта (ГРП), основна мета якого – покращення фільтраційних характеристик присвердловинних зон та утворення високопроникної деревоподібної (каналльної) структури з системою існуючих тріщин, що розвинена в різному ступені та присутня всім породам-колекторам – як теригенним, так і карбонатним. Проте варто відзначити, що вплив тріщинуватості (як природної, так і штучної – тріщини ГРП) на фільтраційні процеси не обмежується збільшенням фільтраційної проникності пласта. Наприклад, у роботі [1] показано, що при обтіканні ізольованої тріщини фільтраційним потоком однофазної рідини в зоні контакту потоків, що входять та виходять з тріщини, величина градієнта тиску наближається до

нуля, що призводить до сповільнення процесу фільтрації в цій ділянці пласта і є передумовою утворення в ній застійних зон. А це, в свою чергу, може протистояти ефективному витісненню пластового флюїду. Зокрема, у роботі [2] із використанням моделі Баклея-Левретта встановлено, що швидкість просування фронту витіснення з наближенням до тріщини ГРП спадає. Тут такий ефект пояснюється відмінністю коефіцієнта проникності в пласті й тріщині. В зв'язку з цим рідині при перетіканні через границю середовищ необхідно перебороти супротив, породжений внутрішніми силами – так званим капілярним ефектом.

**Метою роботи** є узагальнення запропонованого в [2–4] методу математичного моделювання багатофазної фільтрації на випадок неоднорідних нафтогазових пластів за умов урахування капілярних сил, зокрема при існуванні тріщин гідралічного розриву.

**Постановка задачі.** Розглянемо задачу моделювання процесу двофазної ізотермічної фільтрації при витісненні нафти водою в горизонтальному пласті за умов існування певного роду симетрії, яка дозволяє виділити елемент  $G_z$  ( $z = x + iy$ ), що містить 2 нагнітальні свердловини та 1 експлуатаційну (див. рис.1, де  $d = 4(r^0 + a)$ ;  $r^0$  – радіус свердловин;  $a$  – половина відстані між нагнітальними свердловинами;  $h$  – відстань між рядами нагнітальних та експлуатаційних свердловин), коли фільтраційне поле збудене тріщинами ГРП.

Вважається, що динамічні в'язкості фаз постійні, рух рідини – повільний та відбувається без фазових переходів, а функції відносних фазових проникностей і капілярного тиску є відомими та однозначними функціями насиченості.



**Рисунок 1.** Схематичне зображення розміщення свердловин у пласті (а) з виділеним елементом симетрії (б) та відповідна область комплексного квазіпотенціалу (в) (○ – експлуатаційна, ● – нагнітальна свердловини)

**Figure 1.** Schematic representation of the location of wells in the reservoir (a) with the selected item (b) symmetry and the appropriate area of complex quazipotential (c) (○ – development wells, ● – injection wells)

З урахуванням капілярних сил закон фільтрації [5–7] для двох фаз запишемо у вигляді рівняння нерозривності

$$\frac{\partial(\sigma s_l)}{\partial t} + \text{div}(v_l) = 0, \quad (l = o, w) \quad (1)$$

і рівняння руху

$$v_l = -k(x, y) \frac{\tilde{k}_l(s)}{\mu_l} \text{grad}(p_l), \quad (l = o, w), \quad (2)$$

де  $p_l$  – тиск в фазах;  $\mu_l$  – динамічна в'язкість;  $\bar{v}_l$  – швидкість фільтрації  $l$ -ї фази;  $s_l$  – насиченість пласта  $l$ -ю фазою;  $\sigma$ ,  $k(x, y) = \begin{cases} k_\alpha, (x, y) \in D_\alpha, \\ k_*, (x, y) \in G_z \setminus \bigcup_{\alpha} D_\alpha, \alpha = 1, 2, 3, \dots, \end{cases}$  – коефіцієнти пористості та абсолютної проникності ґрунту, де  $D_\alpha$  – ділянка пласта, що відповідає тріщині з індексом  $l$ ;  $\tilde{k}_w = \tilde{k}_w(s)$ ,  $\tilde{k}_o = \tilde{k}_o(s)$  – відносні фазові проникності ( $s = s_w$ ). Індексом « $w$ » і « $o$ » позначено величини, що характеризують воду та нафту. Різниця тисків у фазах приймається рівною капілярному тиску:  $p_o - p_w = p_c$ , де  $p_c = \chi \cos \theta \sqrt{\sigma/k} J(s)$ ;  $\chi$  – коефіцієнт поверхневого натягу;  $\theta$  – крайовий кут змочування;  $J(s)$  – безрозмірна функція Леверетта. Звідси, з урахуванням сумарної швидкості  $\bar{v} = \bar{v}_w + \bar{v}_o$  фільтраційної течії, отримуємо

$$\begin{aligned} \text{div} \bar{v} &= 0, \\ \bar{v} &= -k(x, y) \lambda(s) \left( \left( \frac{\partial p_o}{\partial x} - f(s) \frac{\partial p_c}{\partial x} \right) \bar{i} + \left( \frac{\partial p_o}{\partial y} - f(s) \frac{\partial p_c}{\partial y} \right) \bar{j} \right) = \\ &= k(x, y) \lambda(s) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \bar{j} \right) = \bar{k}(x, y, s) \cdot \text{grad}(\varphi), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\sigma \frac{\partial s}{\partial t} + \bar{v} \cdot \text{grad} f(s) + \text{div}(\beta(x, y, s) \text{grad}(p_c)) = 0, \quad (4)$$

де  $\varphi = \varphi(x, y, t)$  – квазіпотенціал швидкості фільтрації,  $\beta(x, y, s) = k(x, y) \frac{\tilde{k}_w(s) \tilde{k}_o(s)}{\mu_w \mu_o \lambda(s)}$ ,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f(s) \frac{\partial p_c}{\partial x} - \frac{\partial p_o}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = f(s) \frac{\partial p_c}{\partial y} - \frac{\partial p_o}{\partial y}, \quad f(s) = \frac{\tilde{k}_w(s)}{\mu_w \lambda(s)}, \quad \bar{k}(x, y, s) = k(x, y) \lambda(s),$$

$$\lambda(s) = \frac{\tilde{k}_o(s)}{\mu_o} + \frac{\tilde{k}_w(s)}{\mu_w}.$$

Для вираження тиску  $p_o$  через  $\varphi$  виконаємо перетворення

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = f(s) \left( \frac{\partial p_c}{\partial x} dx + \frac{\partial p_c}{\partial y} dy \right) - \left( \frac{\partial p_o}{\partial x} dx + \frac{\partial p_o}{\partial y} dy \right) = f(s) \frac{dp_c}{ds} ds - dp_o,$$

$$\text{у результаті чого матимемо } p_o = -\varphi + \int_0^{s_w} f(\bar{s}) \frac{dp_c(\bar{s})}{d\bar{s}} d\bar{s}.$$

Вважаємо, що на нагнітальних  $L_g$  та експлуатаційних  $L^*$  свердловинах підтримуються постійні тиски (відповідні їм квазіпотенціали позначимо через  $\varphi_*$  та  $\varphi^*$ ), на межі  $\partial D_\lambda$  тріщин ГРП виконуються умови неперервності потоку і тиску, а інші

ділянки границі області  $G_z$  є лініями течії, вздовж яких, зокрема, мають місце рівності  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\tilde{L}} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\underline{L}} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\tilde{L}} = 0$ , де  $L^* = \{z = x + iy \quad f^*(x, y) = 0\} = \{z \quad x = r^0 \cos(\tau) + h, y = r^0 \sin(\tau) + b + r^0, \quad \pi/2 \leq \tau \leq 3\pi/2\}$ ,  $\underline{L} = A_1 \underline{H} \cup \underline{HD} \cup DB_0 = \{z : f(x, y) = 0\}$ ,  $A_1 \underline{H} = \{z : x = 0, 0 \leq y \leq a\}$ ,  $\underline{HD} = \{z : y = 0, 0 \leq x \leq h\}$ ,  $DB_0 = \{z : x = h, 0 \leq y \leq b\}$ ,  $L_g = \{z = x + iy : f_g(x, y) = 0, \quad g = \overline{1, 2}\} = \{z : x = r^0 \cos(\tau), y = r^0 \sin(\tau) + (2g - 1)(a + r^0), 3\pi/2 \leq \tau \leq 5\pi/2\}$ ,  $\tilde{L} = A_2 H_1 A_3 = \{z : x = 0, \quad 2(a + r^0) - a \leq y \leq 2(a + r^0) + a\}$ ,  $\tilde{L} = A_4 \tilde{H} \cup \tilde{HC} \cup CB_2 = \{z : \tilde{f}(x, y) = 0\}$ ,  $A_4 \tilde{H} = \{z : x = 0, d - a \leq y \leq d\}$ ,  $\tilde{HC} = \{z : y = d, 0 \leq x \leq h\}$ ,  $CB_2 = \{z : x = h, b + 2r \leq y \leq d\}$ . Початковий розподіл насиченості в пласті і її значення на нагнітальних свердловинах позначимо відповідно через  $s(x, y, 0) = \tilde{s}(x, y)$  та  $s = s^*$ .

Аналогічно до [3,8], ввівши функцію течії  $\psi$ , комплексно спряжену до  $\varphi$ , задача на побудову гідродинамічної сітки, відшукування фільтраційної витрати та інших характерних фільтраційних параметрів за знайденим (фіксованим у даний момент часу) полем насиченості зводиться до задачі на квазіконформне відображення  $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  однозв'язної області  $G_z$  на відповідну прямокутну

область комплексного квазіпотенціалу  $G_\omega = \bigcup_{g=1}^2 G_g \cup \bar{L}_1$ :

$$\bar{k}(x, y, s) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \bar{k}(x, y, s) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z,$$

$$\varphi|_{L_1} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L_2} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad \psi|_{\underline{L}} = 0, \quad \psi|_{\tilde{L}} = Q_2, \quad \psi|_{A_2 H_1 A_3} = Q_1, \quad (6)$$

$$[\varphi]_{\partial D_\alpha} = 0, \quad [v_n]_{\partial D_\alpha} = 0,$$

$$\sigma \frac{\partial s}{\partial t} + \bar{v} \cdot \text{grad} f(s) + \text{div}(\beta(x, y, s) \text{grad}(p_c)) = 0,$$

$$s|_{L_1} = s^*, \quad s|_{L_2} = s^*, \quad s|_{t=0} = \tilde{s}(x, y), \quad (7)$$

де  $[\bullet]_{\partial D_\alpha}$  – стрибок відповідної функції на  $\partial D_\alpha$ ,  $v(x, y) = |\bar{v}(x, y)|$ ,  $G_1 = \{\omega : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q_1\}$ ,

$G_2 = \{\omega : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, Q_1 < \psi < Q_2\}$   $\bar{L}_1 = \{\omega : \varphi_{H_1} < \varphi < \varphi^*, \psi = Q_1\}$ ,

$$Q_1 = \oint_{L_1} -v_y dx + v_x dy, \quad Q_2 - Q_1 = \oint_{L_2} -v_y dx + v_x dy$$

– невідомі витрати.

Обернену до (6) крайову задачу на квазіконформне відображення  $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$  області  $G_\omega$  на  $G_z$ , а також, як наслідок, рівняння для дійсної  $x = x(\varphi, \psi)$  і уявної  $y = y(\varphi, \psi)$  частин характеристичної функції течії запишемо у вигляді

$$\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
& \tilde{f}(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad \tilde{f}(x(\varphi, Q_2), y(\varphi, Q_2)) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \\
& f_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q_1, \\
& f_2(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad Q_1 \leq \psi \leq Q_2, \\
& x_-(\varphi, Q_1) = 0, \quad 2(a+r) - a \leq y_-(\varphi, Q_1) \leq y_{H_1}, \\
& x_+(\varphi, Q_1) = 0, \quad y_{H_1} \leq y_+(\varphi, Q_1) \leq 2(a+r) + a, \\
& f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q_2, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_{H_1}, \\
& [x(\varphi, \psi)]|_{\partial D_\alpha} = [y(\varphi, \psi)]|_{\partial D_\alpha} = 0, \\
& \left[ \frac{\bar{k}}{J} \sqrt{\left( \frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 + \left( \frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2} \cos(\vec{\nu}, \vec{n}) \right] \Big|_{\partial D_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots, \quad (9)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left( \bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0. \quad (10)$$

Використавши відповідні формули переходу [3, 9–11] умови (8) та формули для обчислення компонент сумарної швидкості, задачу для насиченості (7) перепишемо так:

$$\sigma \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\nu^2}{\bar{k}^2} \left( \beta \frac{\partial^2 p_c}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} \frac{\partial p_c}{\partial \varphi} \right) + \nu^2 \left( \beta \frac{\partial^2 p_c}{\partial \psi^2} + \frac{\partial \beta}{\partial \psi} \frac{\partial p_c}{\partial \psi} \right) + \frac{\nu^2}{\bar{k}} \frac{\partial f(s)}{\partial \varphi} = 0, \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
s(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), 0) &= s^0(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)), \quad 0 \leq \psi \leq Q_2, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \\
s(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t) &= s_*, \quad 0 \leq \psi \leq Q_1, \\
s(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t) &= s_*, \quad Q_1 \leq \psi \leq Q_2. \quad (12)
\end{aligned}$$

**Алгоритм числового розв'язання задачі.** Для побудови різницевого аналогу задачі введемо в області  $G_\omega$  рівномірну ортогональну сітку, вузли  $(\varphi_i, \psi_j)$  якої визначаємо так:

$$\begin{aligned}
\varphi_i &= \begin{cases} \overline{\varphi_* + i\Delta\varphi_1}, & i = 0, n_1, \quad \Delta\varphi_1 = (\varphi_{H_1} - \varphi_*) / (n_1 + 1), \\ \overline{\varphi_{H_1} + (i - n_1 - 1)\Delta\varphi_2}, & i = n_1 + 1, n, \quad \Delta\varphi_2 = (\varphi^* - \varphi_{H_1}) / (n_2 + 1), \end{cases} \\
\psi_j^g &= j\Delta\psi_g, \quad j = \sum_{l=0}^{g-1} m_l + g - 1, \quad \sum_{l=0}^g m_l + g - 1, \quad (\varphi_i, \psi_j^g) \in G_\omega^g, \\
\Delta\psi_g &= (Q_g - Q_{g-1}) / m_g, \quad g = \overline{1, 2}, \quad Q_0 = 0, \quad m_0 = 0,
\end{aligned}$$

$n = n_1 + n_2 + 1$ ,  $m = m_1 + m_2 + 1$ ,  $m_l, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ . Рівняння (10) апроксимуємо наступним чином [3]:

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= (a_n x_{i,j+1} + a_s x_{i,j-1} + a_e x_{i-1,j} + a_s x_{i+1,j}) / a_p, \\ y_{i,j} &= (a_n y_{i,j+1} + a_s y_{i,j-1} + a_e y_{i-1,j} + a_s y_{i+1,j}) / a_p, \end{aligned} \quad (13)$$

де  $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$ ,  $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$ ,  $a_n = k_n \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_+}$ ,  $a_s = k_s \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_-}$ ,  $a_e = \frac{\Delta\psi}{k_e \Delta\varphi_+}$ ,

$$a_s = \frac{\Delta\psi}{k_w \Delta\varphi_-}, \quad a_p = a_n + a_s + a_e + a_w, \quad \Delta\varphi = (\Delta\varphi_- + \Delta\varphi_+) / 2, \quad \Delta\psi = (\Delta\psi_- + \Delta\psi_+) / 2,$$

$k_n = 2k_{i,j} k_{i,j+1} / (k_{i,j} + k_{i,j+1})$ ,  $k_s = 2k_{i,j} k_{i,j-1} / (k_{i,j} + k_{i,j-1})$ ,  $k_e^{-1} = 0.5(k_{i,j}^{-1} + k_{i-1,j}^{-1})$ ,  $k_w^{-1} = 0.5(k_{i,j}^{-1} + k_{i+1,j}^{-1})$ . Вибір величин  $\Delta\varphi_-$ ,  $\Delta\varphi_+$ ,  $\Delta\psi_-$ ,  $\Delta\psi_+$  визначається аналогічно, як і у роботі [11]. Апроксимації крайових умов запишемо так:

$$\begin{aligned} f_2(x_{0,j}, y_{0,j}) &= 0, \quad j = \overline{m_1 + 1, m_1 + m_2 + 1}, \\ f^*(x_{n,j}, y_{n,j}) &= 0, \quad j = \overline{0, m}, \\ x_{i,m_1} &= 0, \quad 2(a+r) - a \leq y_{i,m_1} \leq y_{H_1}, \\ x_{i,m_2} &= 0, \quad y_{H_1} \leq y_{i,m_2} \leq 2(a+r) + a, \quad i = \overline{0, n_1}, \\ \tilde{f}(x_{i,0}, y_{i,0}) &= 0, \quad \tilde{f}(x_{i,m}, y_{i,m}) = 0, \quad i = \overline{0, n}. \end{aligned} \quad (14)$$

Тут як і в [3], комплексну спряженість гармонічних функцій  $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$ ,  $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$  забезпечують умови ортогональності приграничних нормальних векторів до відповідних дотичних уздовж границі області  $G_z$ . Їх різниці аналогі на контурах свердловин мають вигляд

$$\begin{aligned} (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) &= 0, \\ j = \sum_{l=0}^{g-1} m_l + g - 1, \quad \sum_{l=0}^g m_l + g - 1, \quad g = \overline{1, 2}, \quad (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j})(x_{n,j+1} - & \\ -x_{n,j-1}) + (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j})(y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) &= 0, \quad j = \overline{0, m}. \end{aligned} \quad (15)$$

Невідомі витрати  $Q_g$  та значення потенціалу  $\varphi_{H_1}$  у точках розходження течії в процесі ітерацій шукаємо за формулами:  $\varphi_{H_1} = \varphi_* + (n_1 + 1)\Delta\psi_1\gamma_1^1$ ,  $Q_g = m_g\Delta\psi_g$ , де

$$\Delta\psi_g = \frac{\Delta\varphi_1\gamma_2^g + \Delta\varphi_2\gamma_1^g}{2\gamma_1^g\gamma_2^g}, \quad \text{а } \gamma_l^g \text{ отримуємо на підставі умови «квазіконформної}$$

подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників двох областей

$$\gamma_1^g = \sum_{i=0, j=\tilde{m}_1}^{n_1, \tilde{m}_2-1} \frac{\gamma_{i,j}}{m_g(n_1+1)}, \quad \gamma_2^g = \sum_{i=n_2+1, j=\tilde{m}_1}^{n, \tilde{m}_2-1} \frac{\gamma_{i,j}}{m_g n_2}, \quad \tilde{m}_1 = \sum_{l=0}^{g-1} m_l + g - 1,$$

$$\tilde{m}_2 = \sum_{l=0}^g m_l + g - 1, \quad \gamma_{i,j} = \frac{1}{\bar{k}_{i+1/2,j+1/2}} \frac{a_{i,j} + a_{i,j+1}}{b_{i,j} + b_{i+1,j}}, \quad g = \overline{1,2},$$

$$a_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2}, \quad b_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2} \quad (16)$$

Рівняння (11) апроксимуємо різницевою схемою «проти потоку» [3] таким чином:

$$\hat{s}_{i,j} = s_{i,j} - \frac{\tau v_{i,j}^2}{\sigma} \left( \frac{f(s_{i,j}) - f(s_{i-1,j})}{\bar{k}_{i,j} \Delta \varphi_l} - \tilde{f}_{i,j} \right), \quad (17)$$

де

$$\tilde{f}_{i,j} = \frac{\beta_{i,j} (\tilde{p}_{i+1,j} - \tilde{p}_{i,j}) + \beta_{i-1,j} (\tilde{p}_{i,j} - \tilde{p}_{i-1,j})}{\bar{k}_{i,j}^2 \Delta \varphi_l^2} + \frac{\beta_{i,j} (\tilde{p}_{i,j+1} - \tilde{p}_{i,j}) + \beta_{i,j-1} (\tilde{p}_{i,j} - \tilde{p}_{i,j-1})}{\Delta \psi_g^2},$$

$j = \overline{1,m}, i = \overline{1,n_1 + 1}, l = 1, i = \overline{n_1 + 2, n}, l = 2$ ;  $\tilde{p}_{i,j} = p_c(s_{i,j})$ ,  $\beta_{i,j} = \beta(x_{i,j}, y_{i,j}, s_{i,j})$ ,  $\tau$  – крок по часу,  $s_{i,j}$ ,  $\hat{s}_{i,j}$  – насиченості у відповідні моменти часу,  $v_{i,j}$  – швидкість (шукаємо як і в роботі [3]). Граничну та початкову умови для насиченості в сітковій області запишемо так:

$$s_{0,j} = s^*, \quad j = \overline{1,m}, \quad s(x_{i,j}, y_{i,j}, 0) = \tilde{s}(x_{i,j}, y_{i,j}).$$

Задавши крок  $\tau$ , параметри розбиття  $n_1, n_2, m_1, m_2$  області  $G_\omega$  та точності роботи алгоритму  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , початкові наближення координат граничних вузлів  $x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)}$  (так, щоб виконувалися умови (14)) і початкові наближення координат внутрішніх вузлів  $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$ , знаходимо за формулами (16) наближення величин  $\gamma_l^g$ . Далі проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки шляхом розв'язання (13) відносно  $x_{i,j}$  та  $y_{i,j}$ . Після цього, як і в [11], підправляємо граничні вузли за умов фіксації навколишніх граничних та приграничних, використовуючи умови ортогональності, та знаходимо наближення величин  $Q_g, \varphi_{H_1}$ . Серед умов завершення алгоритму побудови гідродинамічної сітки (відшукування невідомих фільтраційних параметрів, зокрема поля швидкості) на даному ітераційному етапі є стабілізація витрат  $Q_g$  ( $|\mathcal{Q}_g^{(\kappa+1)} - \mathcal{Q}_g^{(\kappa)}| < \varepsilon_1$ ) та стабілізація граничних вузлів ( $\max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(\kappa)} - x_{i,j}^{(\kappa-1)})^2 + (y_{i,j}^{(\kappa)} - y_{i,j}^{(\kappa-1)})^2} < \varepsilon_2$ ) тощо.

Використовуючи побудоване поле швидкостей та поле насиченості з попереднього ітераційного кроку (з урахуванням граничних умов), з (17) знаходимо розподіл насиченості у пласті на даному часовому етапі, після чого повторюємо кроки алгоритму.

**Висновки.** Числовий метод комплексного аналізу дослідження нелінійних процесів витіснення флюїдів узагальнено на випадок неоднорідних нафтогазових пластів із урахуванням капілярних сил та можливості існування тріщин гідралічного розриву. В майбутньому цей підхід буде використано для оцінювання впливу перехідної зони в околі тріщин на залишкову нафтонасиченість пласта.

**Conclusions.** Numerical methods of complex analysis study of nonlinear processes of fluid displacement is generalized in case of heterogeneous oil and gas reservoirs and with consideration the influence of capillary forces and the possibility of the existence of cracks in hydraulic fracturing. In the future, this approach will be used for estimating the impact of transition zone in the vicinity of cracks on the residual oil-saturated of reservoir.

#### Список використаної літератури

1. Свалов, А.М. Механика процессов бурения и нефтегазодобычи [Текст] / А.М. Свалов. – М.: Либроком, 2009. – 256 с.
2. Бомба, А.Я. Метод комплексного анализа исследования двухфазной фильтрации в горизонтальных пластах с учетом гидроразрыва [Текст] / А.Я. Бомба, А.М. Синчук, С.В. Ярошак // Электронное моделирование, 2013. – Т.35, № 2. – С.25–33.
3. Бомба, А.Я. Методи комплексного аналізу: монографія [Текст] / А.Я. Бомба, С.С. Каштан, Д.О. Пригорницький, С.В. Ярошак. – Рівне: НУВГП, 2013. – 415 с.
4. Бомба, А.Я. Системный анализ фильтрационных процессов в многосвязных криволинейных областях [Текст] / А.Я. Бомба, В.В. Скопецкий, С.В. Ярошак // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики», 2010. – №4. – С.64–72.
5. Zhangxin, C. Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media (Computational Science and Engineering) [Text] / C. Zhangxin, H. Guanren, M. Yuanle. – Paperback. Society for Industrial and Applied Mathematic, 2006. – 531 pp.
6. Дейк, Л.П. Практический инжиниринг резервуаров [Текст] / Л.П. Дейк. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. – 668 с.
7. Баренблатт, Г.И. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа [Текст] / Г.И. Баренблатт, В.М. Ентов, В.М. Рыжик. – М.: Недра, 1972. – 288 с.
8. Бомба, А.Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки [Текст] / А.Я. Бомба, В.М. Булавацький, В.В. Скопецкий. – К.: Наукова думка, 2007. – 308 с.
9. Бомба, А.Я. Метод квазіконформних відображень розв'язання модельних задач двофазної фільтрації [Текст] / А.Я. Бомба, С.В. Ярошак // Доповіді НАН України, 2010. – №10 – С. 34–40.
10. Бомба, А.Я. Числовий метод квазіконформних відображень моделювання процесів двофазної фільтрації [Текст] / А.Я. Бомба, С.В. Ярошак // Обчислювальна та прикладна математика, 2010. – №2. – С.3–13.
11. Bomba, A.Ya. Complex approach to modeling of two-phase filtration processes under control conditions [Текст] / A.Ya. Bomba, S.V. Yaroshak // Journal of Mathematical Sciences, Vol. 184, No. 1, July, 2012. – P.56–69.

*Отримано 17.11.2014*