

УДК 539.3

**О. Панчук; Г. Габрусєв, канд. фіз.-мат. наук;
Б. Шелестовський, канд. фіз.-мат. наук**

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ВПЛИВ ЗАЛИШКОВИХ ДЕФОРМАЦІЙ НА КОНТАКТНУ ВЗАЄМОДІЮ ЖОРСТКОГО ШТАМПА ТА ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ

Резюме. Наведено розв'язок осесиметричної контактної задачі про тиск штампа складної конфігурації на пружний ізотропний півпростір з урахуванням попередніх напружень. Побудовано функції розподілу контактних напружень для граничної площини. Проаналізовано вплив поля залишкових деформацій на розподіл контактних напружень та форму площадки контакту.

Ключові слова: напруження, залишкові деформації, штамп складної конфігурації, півпростір.

O. Panchuk, H. Habrusiev, B. Shelestovskiy

INFLUENCE OF RESIDUAL STRAIN ON THE CONTACT INTERACTION OF A HARD PUNCH AND ELASTIC SEMI-SPACE

Summary. Calculating the strength of structural elements and mechanisms is one of the most important stages in the process of their design. As it is known [2], residual deformation is almost always available in the structural elements and machine parts. The nature of their appearance can be very different: irreversible deformation (plasticity, creep), structural changes in the material, changes of the aggregate state in some areas, mechanical, chemical and technological processes, etc. Resultant stress can cause fracture and accelerate some phase transitions, corrosion in particular.

To improve the accuracy of calculations the residual must be taken into account, which directly affect the state of bodies. Taking into account all the factors that affect the interaction of the body is one of the key problems to determine the stability, reliability and other characteristics. Therefore, consideration of residual stress in the study of contact interaction of elastic bodies is an important task.

Research problems of the contact interaction investigations of the preliminary stressed bodies in our country and abroad had appeared in the sufficient quantity only by the end of the last century. First of all it is due to the fact, that the linear elasticity theory does not consider the residual stresses in bodies. In general, strict proper statement of such problems requires the use of system of the nonlinear elasticity theory, however, for the sufficiently large values of the initial stresses its linearized version can be referred to.

In the article the solution of axisymmetric contact problem of pressure a punch of complex shape for an elastic isotropic half-space, taking into account preliminary stresses is described. Besides distribution function of contact stresses and displacements for the plane boundary of semi-space was created.

Besides, the residual deformation field characteristics effect on the amount and nature of the contact stresses under punch has been analyzed.

Key words: contact stresses, punch of complex shape, isotropic semi-space, residual deformations.

Постановка проблеми. Розрахунок міцності елементів конструкцій та механізмів є одним з найважливіших етапів у процесі їхнього проектування. Для визначення міцності та витривалості необхідним є обчислення контактних деформацій і напружень при взаємодії жорстких штампів та пружних тіл із наявними залишковими деформаціями, які можуть суттєво впливати на розподіл контактних напружень і форму площадки контакту.

Аналіз останніх досліджень. Питанням взаємодії жорстких штампів та пружних тіл із наявними залишковими деформаціями займалися багато вчених, зокрема й вітчизняних. Контактні задачі для тіл із початковими напруженнями в рамках лінеаризованої теорії пружності при різних формах пружного потенціалу розглядали Артюнян Н.Х., Александров В.М., Сметаніна Б.І., Філіпова Л.М. та інші. Приклади розв'язку задач кручення для пружних тіл з початковими напруженнями наведено в роботах Бабича С.Ю., Гузя О.М., Глухова Ю.П., Рудницького В.Б. [2]. Взаємодію між кількома штампами на пружному півпросторі розглянуто в роботах І.І. Аргатова.

Мета роботи. Дослідити вплив залишкових деформацій на розподіл контактних напружень при контактній взаємодії штампа складної конфігурації з пружним півпростором.

Постановка задачі. Визначимо вплив залишкових деформацій на розподіл контактних напружень у випадку контактної взаємодії штампа складної конфігурації та попередньо напруженого півпростору [6]. Штамп складається з двох частин, жорстко з'єднаних між собою. Перша утворена внаслідок обертання навколо спільної осі двох віток парабол, спряжених у вершинах відрізком прямої, перпендикулярної до осі обертання. Друга – внаслідок обертання ще однієї вітки параболі, вершина якої спряжена з віссю обертання перпендикулярним до неї відрізком. Вершини всіх трьох парабол лежать на одній прямій, перпендикулярній до осі обертання. Осі парабол, що обмежують штамп, паралельні до спільної осі обертання, що співпадає з лінією дії сили P . Штамп втискується в півпростір з постійною силою P поступально, без обертання і тертя.

Виберемо циліндричну систему координат (O, r, φ, z) так, щоб координатна площина (r, O, φ) співпадала з граничною площиною півпростору, а вісь Oz – із лінією дії сили P (рис.1).

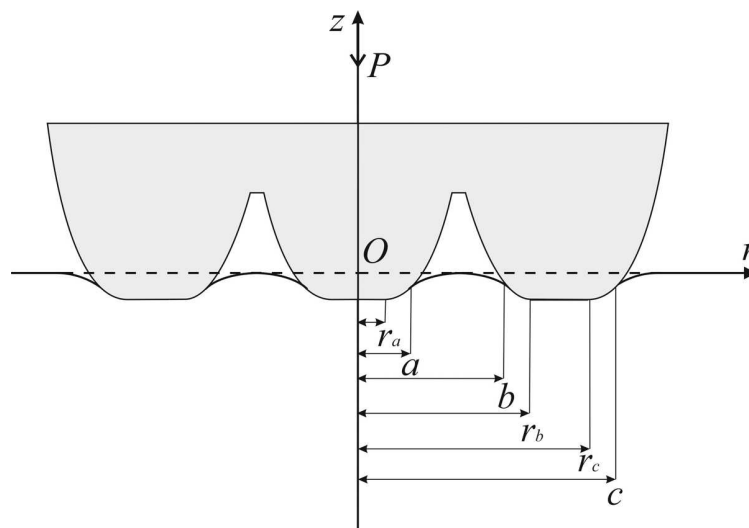


Рисунок 1. Схема контактної взаємодії

Figure 1. Scheme of contact interaction

Виходячи із формулювання задачі, можна описати функцію, обертанням графіка якої навколо осі Oz утворено штамп, у вигляді

$$W(r) = \begin{cases} \frac{1}{2R_1}(r-r_a)^2, & r_a < r \leq \frac{\sqrt{R_2}r_a + \sqrt{R_1}r_b}{\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2}}; \\ \frac{1}{2R_2}(r-r_b)^2, & \frac{\sqrt{R_2}r_a + \sqrt{R_1}r_b}{\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2}} < r < r_b; \\ \frac{1}{2R_3}(r-r_c)^2, & r_c < r < c; \\ 0, & 0 < r < r_a, r_b < r < r_c. \end{cases} \quad (1)$$

Використовуючи апарат лінеаризованої теорії пружності [1], вирази для компонентів тензора напружень та вектора переміщень на граничній площині півпростору при $z = 0$, матимуть вигляд

$$\sigma_{rz}(r, 0) = \frac{c_{44}(1+m_1)}{\sqrt{n_1}} \int_0^\infty \alpha^3 (F_1 + s_0 F_2) J_0(\alpha r) d\alpha, \quad (2)$$

$$\sigma_{zz}(r, 0) = c_{44}(1+m_1) l_1 \int_0^\infty \alpha^3 (F_1 + s F_2) J_0(\alpha r) d\alpha, \quad (3)$$

$$u_z(r, 0) = \frac{m_1}{n_1} \int_0^\infty \alpha^2 (F_1 + s_1 F_2) J_0(\alpha r) d\alpha. \quad (4)$$

У співвідношеннях (3)–(5) $F_1(\alpha)$ та $F_2(\alpha)$ – невідомі функції, які необхідно визначити, виходячи із граничних умов, константи $c_{44}, m_1, n_1, l_1, s, s_0, s_1$ залежать від характеру поля залишкових деформацій.

Граничні умови поставленої задачі матимуть вигляд

$$\sigma_{zz} = 0, a \leq r < b, r > c; \quad (5)$$

$$\sigma_{rz} = 0, 0 \leq r < \infty; \quad (6)$$

$$u_z = W_1(r), 0 \leq r \leq a; \quad (7)$$

$$u_z = W_2(r), b < r < c. \quad (8)$$

Функції $W_1(r)$ та $W_2(r)$ визначають переміщення точок граничної площини пружного півпростору на ділянці його контакту із жорстким штампом та описуються співвідношенням (1). Очевидно, виходячи із цілісної структури штампа, повинна виконуватись умова

$$W_1(r_a) = W_2(r_b) = W_2(r_c). \quad (9)$$

Розв'язання поставленої задачі, наведене у роботі [6], базується на представленні невідомої функції, що є розв'язком системи інтегральних рівнянь, у вигляді відрізка узагальненого ряду Фур'є за функціями Бесселя:

$$x(r) = \sum_{n=1}^N a_n J_0\left(\frac{\lambda_n}{a} r\right), \quad 0 \leq r \leq a; \quad y(r) = \sum_{n=1}^N b_n(r) L_n(r), \quad b \leq r \leq c, \quad (10)$$

$$L_n(r) = J_0\left(\frac{\gamma_n}{\alpha} r\right) Y_0(\gamma_n) - Y_0\left(\frac{\gamma_n}{\alpha} r\right) J_0(\gamma_n),$$

де γ_n – додатні корені рівняння $\left(\frac{c}{b} x\right) Y_0(x) - Y_0\left(\frac{c}{b} x\right) J_0(x) = 0$; λ_n – додатні корені функції Бесселя $J_0(x)$. Слід відзначити, що невідомі функції $x(r)$ та $y(r)$ описують розподіл контактних напружень під штампом.

Для знаходження невідомих коефіцієнтів розкладу (10) отримано системи лінійних алгебраїчних рівнянь, при розв'язанні яких використано метод суперпозиції із введенням позначень

$$a_n = P\left(a_n^{(1)} z_1^* + a_n^{(2)} z_2^* + a_n^{(3)} z_3^*\right), \quad b_n = P\left(b_n^{(1)} z_1^* + b_n^{(2)} z_2^* + b_n^{(3)} z_3^*\right).$$

Відносно невідомих z_1^* , z_2^* , та z_3^* отримано систему трьох рівнянь, виходячи із умови рівноваги штапу та умов його цілісності (9).

Геометрично z_i^* визначають кривину парабол, що обмежують штамп, а саме

$$R_i = \frac{1}{2K_1 P \cdot z_i^*}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (11)$$

В останньому виразі введено позначення $K_1 = \frac{m_1(s_1 - s_0)}{\sqrt{n_1 c_{44}}(1 + m_1)(s - s_0)l_1}$.

Остаточно формули для знаходження розподілу контактних напружень під штампом матимуть вигляд

$$\sigma_{zz}(r, 0) = x(r) = P \sum_{n=1}^N (a_n^{(1)} z_1^* + a_n^{(2)} z_2^* + a_n^{(3)} z_3^*) J_0\left(\frac{\lambda_n}{a} r\right), \quad 0 < r < a,$$

$$\sigma_{zz}(r, 0) = y(r) = P \sum_{n=1}^N (b_n^{(1)} z_1^* + b_n^{(2)} z_2^* + b_n^{(3)} z_3^*) L_n(r), \quad b < r < c.$$

Використавши (5), можна записати вираз для функції, що визначає переміщення точок граничної площини півпростору

$$u_z(r,0) = K_1 P \left[\sum_{n=1}^N (a_n^{(1)} z_1^* + a_n^{(2)} z_2^* + a_n^{(3)} z_3^*) T_n^{(1)}(r) + \sum_{n=1}^N (b_n^{(1)} z_1^* + b_n^{(2)} z_2^* + b_n^{(3)} z_3^*) T_n^{(2)}(r) \right],$$

$$T_n^{(1)} = \int_0^a \Psi_n(\alpha) J_0(\alpha r) d\alpha, \quad T_n^{(2)}(r) = \int_0^c \Phi_n(\alpha) J_0(\alpha r) d\alpha,$$

$$\Psi_n(\alpha) = \int_0^a r J_0\left(\frac{\lambda_n}{a} r\right) J_0(\alpha r) dr, \quad \Phi_n(\alpha) = \int_b^c r L_n(r) J_0(\alpha r) dr.$$

Постановка

задачі у формі (5)–(8) вимагає надання значень параметрам a , b , c , що визначають площадку контакту, ще до розв'язання самої задачі. Це необхідно зробити, оскільки вони ж задають область визначення шуканих функцій. Також при такій постановці радіуси кривини парабол, обертанням яких утворено штамп, наперед є невідомими, а визначаються залежно від заданих наперед a , b , c , K_1 та P зі співвідношень (5). Проте для вивчення впливу поля залишкових деформацій на розподіл контактних напружень необхідно визначити геометричні параметри площадки контакту a , b , c залежно від радіусів кривини R_1 , R_2 , R_3 та характеристик поля залишкових деформацій K_1 . Продемонструємо запропонований нами спосіб такого визначення числовим прикладом.

Виберемо по 7 вузлових значень для параметрів a , b та c із кроком 0.5:

$$a = 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5, 0.55, 0.6;$$

$$b = 0.6, 0.65, 0.7, 0.75, 0.8, 0.85, 0.9;$$

$$c = 1.2, 1.25, 1.3, 1.35, 1.4, 1.45, 1.5.$$

Із використанням розв'язаної задачі [6], знайдемо відповідні їм значення z_1^* , z_2^* та z_3^* , які не залежать від характеристик поля залишкових деформацій:

z_1^*	z_2^*	z_3^*
-2.34259739	-1.0135984	-8.39859641
-1.67959383	-1.38774644	-5.64368215
-1.24165091	-1.94188703	-4.04640953
-0.93654495	-2.82074059	-3.03916581
-0.7125328	-4.34148568	-2.36007379
-0.5399027	-7.42144546	-1.88130476
-0.40041331	-1531653144	-1.53110928

Використавши співвідношення (11), визначимо значення параметрів R_1 , R_2 , R_3 для випадку відсутності у півпросторі залишкових деформацій ($\lambda_1 = 1$):

R_1	R_2	R_3
0.11727379	0.27118366	0.03271086
0.16356649	0.19796504	0.04867837
0.22125806	0.14147336	0.06789359
0.29333912	0.09739473	0.09039496
0.38556158	0.06327909	0.11640538
0.50884219	0.03701776	0.14602912
0.68610425	0.01793652	0.17942891

Аналогічно знаходимо значення R_1 , R_2 , R_3 за наявності залишкових деформацій розтягу ($\lambda_1 = 1.2$):

R_1	R_2	R_3
0.14489072	0.33504499	0.04041397
0.20208494	0.24458404	0.0601417
0.27336236	0.17478907	0.08388193
0.36241787	0.12033032	0.11168217
0.47635789	0.07818075	0.1438178
0.62866999	0.04573511	0.18041767
0.84767568	0.02216041	0.22168282

А також для випадку наявних у півпросторі стискуючих залишкових деформацій ($\lambda_1 = 0.8$):

R_1	R_2	R_3
0.08209941	0.1898465	0.02289976
0.11450736	0.13858862	0.03407808
0.15489528	0.09904071	0.04753
0.20535679	0.06818275	0.06328245
0.26991861	0.04429955	0.08149146
0.35622319	0.02591488	0.10223004
0.48031835	0.01255675	0.12561211

Для кожного із розглянутих випадків ($\lambda_1 = 1$, $\lambda_1 = 0.8$ та $\lambda_1 = 1.2$) будемо апроксимуючі функції що визначають залежність $R_1 = R_1(a)$, $R_2 = R_2(b)$ та $R_3 = R_3(c)$. За їх допомогою можна легко визначити параметри площадки контакту залежно від радіусів кривини парабол, обертаням яких утворено штамп. Виберемо для прикладу

$$R_1 = 0.2, R_2 = R_3 = 0.1.$$

Тоді отримаємо:

$$\text{при } \lambda_1 = 1, a = 0.38281998, b = 0.74666542, c = 1.36927719; \quad (12)$$

$$\text{при } \lambda_1 = 1.2, a = 0.44521889, b = 0.69862689, c = 1.44490947; \quad (13)$$

при $\lambda_1 = 0.8$, $a = 0.34835857$, $b = 0.77251613$, $c = 1.32989846$. (14)

На рис.2 побудовано графік $\sigma^* = \frac{\sigma_{zz}(r,0)}{P}$ – безрозмірних контактних напружень під штампом. Пунктирна крива відповідає випадку відсутності у півпросторі залишкових деформацій (12), крива 1 – випадку наявних деформацій розтягу (13), а крива 2 – деформацій стиску (14).

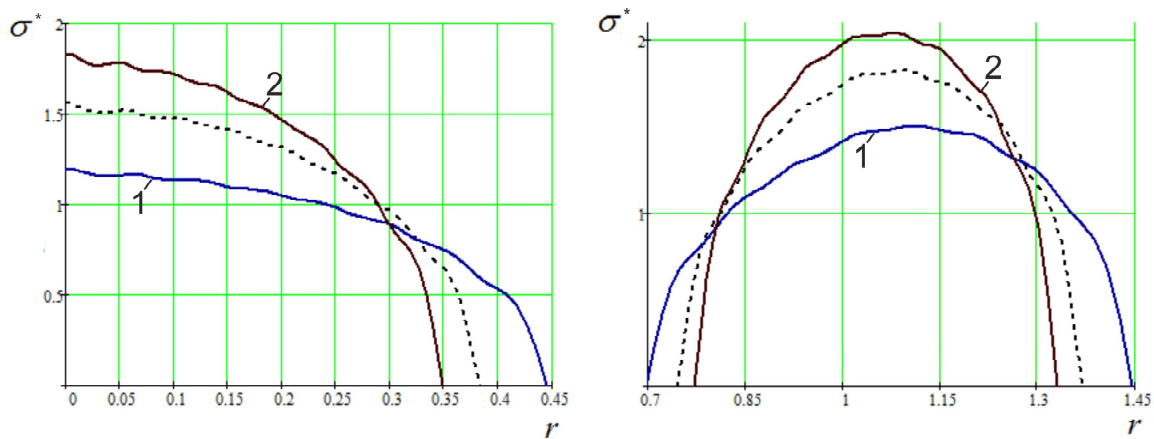


Рисунок 2. Розподіл контактних напружень під штампом

Figure 2. Distribution of contact stresses under the punch

На рис.3 побудовано графік безрозмірної величини u^* , що характеризує переміщення точок граничної площини півпростору для аналогічних наборів значень параметрів (12)–(14).

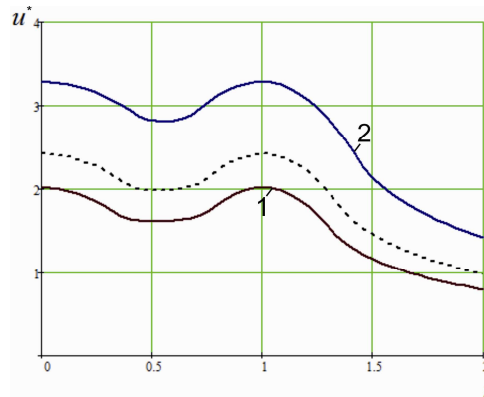


Рисунок 3. Переміщення точок граничної площини півпростору

Figure 3. Displacement of the semi-space boundary plane points

Висновки. Аналіз отриманих результатів дає можливість стверджувати, що поява залишкових деформацій призводить до зміни глибини втискання штампа у півпростір, і, як наслідок, до зміни площадки контакту та абсолютної величини контактних напружень. Зокрема при виникненні у пружному півпросторі розтягуючих деформацій площадка контакту збільшується, а контактні напруження є меншими, ніж у випадку, коли залишкові деформації відсутні. Окрім цього, можна зробити висновок, що при стискуючих залишкових деформаціях зростають контактні напруження та зменшується

площадка контакту. Достовірність зроблених висновків підтверджує їх узгодження із результатами, отриманими іншими авторами [4,5].

Conclusions. Numerical example of searching components of contact stresses for both contact areas is considered. Numerical analysis allows to state, that the appearance of the residual tensile stress in the body causes a narrowing of the contact area and increasing of the absolute value of the contact stresses. Appearance of the compression strains causes the broadening of contact area and reduces the absolute value of the contact stresses. Reliability of conclusions confirms their agreement with the results obtained by other authors [4,5].

Список використаної літератури

1. Гузь, А. Н. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (окончательными) напряжениями [Текст] / А. Н. Гузь, В. Б. Рудницкий. – Хмельницкий, 2006. – 710 с.
2. Бабич, С. Ю. Контактные задачи для упругих тел с начальными напряжениями применительно к жестким и упругим штампам [Текст] / С. Ю. Бабич, А. Н. Гузь, В. Б. Рудницкий // Прикл. механика. – 2004. – Т. 40, № 7. – С. 41–69.
3. Гузь, А. Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями [Текст] / А. Н. Гузь. – Киев: Наукова думка, 1983. – 296 с.
4. Гузь, О. М. Контактна взаємодія тіл з початковими (залишковими) напруженнями [Текст] / О. М. Гузь, В. Б. Рудницький // Проблеми математичного моделювання сучасних технологій: Зб. наук. пр. за матеріалами міжнар. наук.-техн. конф. – 2004. – С. 5–35.
5. Габрусєва, І. Ю. Контактна взаємодія кільцевого штампа із попередньо напруженим півпростором [Текст] / І. Ю. Габрусєва, Б. Г. Шелестовський // Вісник ТНТУ. – 2009. – №3.
6. Панчук, О. І. Контактна задача для штампа складної конфігурації та попередньо напруженого півпростору [Текст] / Габрусєв Г. В., Шелестовський Б. Г. // Вісник ТНТУ. – 2015. – №1.

Отримано 03.04.2015