

УДК 539.3

О. Бедзір, канд. фіз.-мат. наук

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України

КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ ПРОРІЗНОЇ ОБОЛОНКИ З ДЕФОРМІВНИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ

Резюме. Сформульовано постановку змішаної контактної задачі взаємодії деформівного заповнювача з прорізною циліндричною оболонкою. З використанням одновимірних моделей оболонки й заповнювача отримано інтегральне рівняння для знаходження контактних напружень. На основі чисельного розв'язку досліджено вплив геометричних розмірів, кількості розрізів в оболонці та фізичних властивостей взаємодіючих тіл на жорсткість і міцність системи.

Ключові слова: контактна задача, прорізна циліндрична оболонка, деформівний заповнювач, фрикційна взаємодія, пружний елемент.

O. Bedzir

CONTACT INTERACTION OF A SLOTTED SHELL WITH A DEFORMABLE FILLER

Summary. The aim of the present work is to construct a mathematical model of the friction contact of a slotted cylindrical shell with a deformable filler. The statement of the mixed problem on frictional interaction in the system, which consists of cylindrical slotted shells divided by a deformable filler, is presented. Problem statement is carried out using one-dimensional models of shell and filler. The character of the contact interaction of the filler and the slotted shell is determined by the law of dry friction.

It is assumed that the number of slots of the shell is large and that the filler is under conditions of axisymmetric deformation. The shell, which has slots, consists of panels that are subjected to plane bending in radial planes.

We model the friction interaction of the slotted shell and the filler under monotonic external loading of the system by the relations of one-sided normal contact with regard to the detachment zone.

The integral equation for the unknown contact stress was obtained.

The solution of the system of equations is obtained by the method of quadratures using the formula of trapezoids with a homogeneous mesh of nodes. In this case, we use the method of successive approximation of the array of nodal values of the contact stress and of the unknown coordinates section slip zones and detachment. As a result, we obtain a table of the values of contact stresses.

On the basis of a numerical solution the influence of geometric sizes, the number of slots in the shell and the physical properties of the interacting bodies on the rigidity and strength of the system are investigated.

It has been established that the reduction of the length of the filler leads to the rise of the contact pressure of the filler on the shell, the reduction of the carrying capacity of the panels of the slotted cylindrical shell, and the decrease in the bearing capacity of the contact system. The results of these studies can be used in the design of shell elastic elements.

Key words: contact problems, slotted cylindrical shell, deformable filler, friction interaction, elastic component.

Постановка проблеми. Механічна система, яка складається з тонкостінних циліндричних оболонок та заповнювача широко використовується в різноманітних механізмах [1]. Особливо ефективним є використання такої оболонкової конструкції в

віброзахисних пристроях, які працюють в складних експлуатаційних умовах. Серед оболонкових пружин можна виділити групу сформовану на основі оболонок з поздовжніми розрізами [1, 2]. Основними механічними характеристиками пружних елементів є їх міцність, жорсткість, демпфувальна здатність. Створення пружних елементів з заданими характеристиками та необхідність прогнозування їх поведінки при експлуатації, зумовлює потребу у розробці методів розрахунку оболонкових систем з заповнювачем. Бачиться актуальним розробка теорії розрахунку прорізних оболонкових пружних елементів з метою вдосконалення існуючих та створення нових конструкцій. Робота оболонкових пружних систем моделюється задачами про фрикційну взаємодію тонкостінних елементів з деформівним заповнювачем з врахуванням неідеального контакту. Тому дослідження контактної взаємодії циліндричних оболонок з розрізами та деформівних тіл, розробка методики розрахунку параметрів та демпфуючих характеристик оболонкових прорізних пружних елементів, є актуальними.

Аналіз досліджень і публікацій. Моделювання роботи оболонкових пружних систем зводиться до постановки змішаних контактних задач про фрикційну взаємодію тонкостінних оболонок з деформівним заповнювачем [3–5]. У повідомленні [4] реалізовано модель прорізної оболонки з затисненням на торцях. Запропонований підхід до задачі дозволив розробити методику інженерного розрахунку прорізних оболонкових елементів і проаналізувати основні їх властивості [5].

Метою роботи є визначення напружено-деформованого стану елементів контактної системи та її жорсткості при зовнішньому навантаженні F для конструкції з різними довжинами заповнювача та прорізної оболонки (рис.1).

Постановка контактної задачі. Розглянемо пружний циліндр радіуса R та довжини $2\gamma l, \gamma \in [0,1]$, який заповнює циліндричну оболонку товщиною h та довжиною $2l$. У межах заповнювача оболонка має меридіанні розрізи. На торці пружного заповнювача через абсолютно жорсткі гладкі поршні передається зовнішнє навантаження F . Характер контактної взаємодії заповнювача та прорізної оболонки визначається законом сухого тертя. Напружено-деформований стан контактної системи досліджуємо в циліндричній системі координат $O r \theta z$.

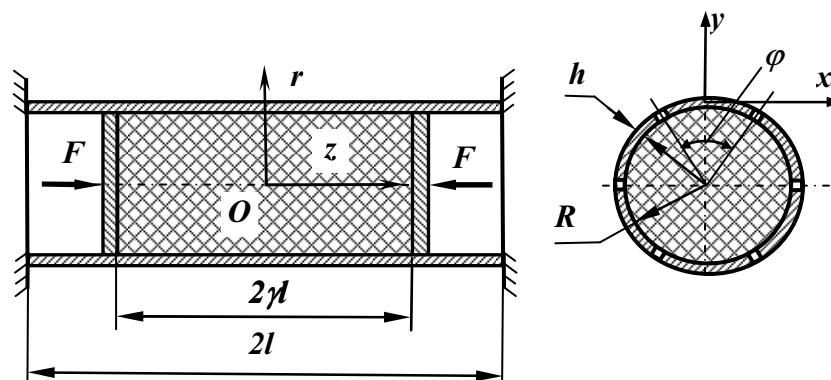


Рисунок 1. Контактна система

Figure 1. Contact system

Приймаємо, що число розрізів оболонки є великим і заповнювач перебуває в умовах осесиметричної деформації. Для його моделювання використовуємо співвідношення, запропоновані в [3]:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma, \quad \tau_{r\zeta} = \frac{\tau r}{R}, \quad u_\zeta = u, \quad u_r = \frac{w r}{R},$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\theta = \frac{w}{R} = \frac{1}{E} [(1-\nu)\sigma - \nu\sigma_\zeta],$$

$$\varepsilon_\zeta = \frac{1}{l} \frac{du}{d\zeta} = \frac{1}{E} [\sigma_\zeta - 2\nu\sigma], \quad \frac{d\sigma_\zeta}{d\zeta} + \frac{2l\tau}{R} = 0, \quad (1)$$

де $\sigma_r, \sigma_\zeta, \sigma_\theta, \tau_{r\zeta}$ – нормальні та дотичне напруження; σ, τ – нормальне і дотичне контактні напруження; u_ζ, u_r – осьове та радіальне переміщення; w – радіальне переміщення на поверхні контакту $r=R$; u – осьове переміщення перерізів заповнювача; $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \varepsilon_{rz}$ – деформації; $\zeta = z/l$ – безрозмірна осьова координата; E, ν – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу заповнювача.

Фрикційну взаємодію прорізної оболонки й заповнювача при монотонному зовнішньому навантаженні системи моделюємо співвідношеннями одностороннього нормального контакту з урахуванням зони відлипання [5]

$$[w] = w_0 - w = 0, \quad \sigma(\zeta) < 0, \quad \zeta \in T', \quad T' = [-\gamma, a] \cup [a, \gamma], \quad (2)$$

$$[w] > 0, \quad \sigma(\zeta) = 0, \quad \zeta \in T'', \quad T'' = (-a, a), \quad (3)$$

де w_0 – прогин панелі; $[w]$ – стрибок радіальних переміщень на контактній поверхні; T', T'' – області проковзування та відлипання відповідно; a – невідома безрозмірна координата точок їх розмежування.

Закон тертя Кулона описує контактну взаємодію панелей та заповнювача в зоні проковзування

$$\tau(\zeta) = f\sigma(\zeta) \operatorname{sgn} \zeta, \quad \zeta \in T', \quad (4)$$

де f – коефіцієнт сухого тертя.

На торцях заповнювача виконуються умови

$$\sigma_\zeta(\pm 1) = -p \equiv -\frac{F}{\pi R^2}. \quad (5)$$

Результати досліджень. Зі співвідношення (1) з урахуванням умови (5) знаходимо інтегральний вираз для радіальних переміщень заповнювача на поверхні контакту

$$w(\zeta) = \frac{R}{E} \left\{ (1-\nu)\sigma(\zeta) - \nu \left[-p + \frac{l}{R} \int_{T'} \tau(\xi) \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) d\xi \right] \right\}. \quad (6)$$

Осьову деформацію заповнювача знаходимо зі співвідношення

$$\varepsilon_{\zeta}(\zeta) = \frac{1}{E} \left[-p - 2\nu\sigma + \frac{l}{R} \int_{-\gamma}^{\gamma} \tau(\xi) \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) d\xi \right]. \quad (7)$$

Розглянемо модель прорізної оболонки. Приймаємо, що прорізна оболонка складається з панелей, які зазнають плоского згину в радіальних площинах. Запишемо рівняння пружної лінії панелі, розглядаючи її як стержень з дугоподібною формою поперечного перерізу,

$$\frac{E_0 I_x}{l^4} \frac{d^4 w_0}{d\zeta^4} = -\sigma^* b, \quad \zeta \in [-\gamma; \gamma], \quad (8)$$

$$\text{де } \sigma^* = \begin{cases} \sigma, & \zeta \in [-\gamma, \gamma], \\ 0, & \zeta \in [-1; -\gamma) \cup (\gamma; 1]. \end{cases}$$

де $b = 2R \sin(\varphi/2)$ – ширина панелі; $E_0 I_x = 0,5 E_0 h R^3 (\varphi + \sin(\varphi) - 8 \sin^2(\varphi/2) / \varphi)$ – жорсткість панелі на згин; $\varphi = 2\pi/N$, N – число розрізів; E_0 – модуль Юнга матеріалу оболонки.

Розв'язок диференційного рівняння (8) знаходимо у вигляді

$$w_0(\zeta) = C_0 + C_1 \zeta + C_2 \zeta^2 + C_3 \zeta^3 + \frac{1}{12} k^4 \int_{-1}^1 |\xi - \zeta|^3 \sigma(\xi) d\xi, \quad (9)$$

$$\text{де } k^4 = -\frac{l^4 b}{E_0 I_x}.$$

Сталі інтегрування C_0, C_1, C_2, C_3 визначаємо, використовуючи умови закріплення панелей прорізної оболонки. Виходячи з конструктивних міркувань, вважаємо, що панелі жорстко зацімлені на краях,

$$w_0(\pm 1) = 0, \quad \left. \frac{dw_0}{d\zeta} \right|_{\zeta=\pm 1} = 0 \quad (10)$$

У результаті підстановки (9) в співвідношення (10) отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно сталих інтегрування, розв'язком якої є

$$C_0 = k^4 \int_{-1}^1 \left(-\frac{1}{8} \xi^2 + \frac{1}{24} \right) \sigma(\xi) d\xi, \quad C_1 = k^4 \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{8} \xi^3 + \frac{1}{8} \xi \right) \sigma(\xi) d\xi,$$

$$C_2 = k^4 \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{8} \xi^2 + \frac{1}{8} \right) \sigma(\xi) d\xi, \quad C_3 = k^4 \int_{-1}^1 \left(-\frac{1}{24} \xi^2 + \frac{1}{8} \xi \right) \sigma(\xi) d\xi$$

Таким чином, вираз для знаходження радіального переміщення оболонки (9) з урахуванням знайдених констант буде

$$w_0(\zeta) = -k^4 \int_{-1}^1 G(\zeta, \xi) \sigma(\xi) d\xi, \zeta \in [-1; 1], \quad (11)$$

де $G(\zeta, \xi)$ – функція Гріна крайової задачі (8), (10), і визначається співвідношенням

$$G(\zeta, \xi) = \frac{1}{24} - \frac{\xi^2}{8} + \left[\frac{\xi}{8} + \frac{\xi^3}{8} \right] \zeta - \left[\frac{\xi}{8} + \frac{\xi^2}{8} \right] \zeta^2 + \left[\frac{\xi}{8} - \frac{\xi^3}{24} \right] \zeta^3 + \frac{1}{12} (\xi - \zeta)^3 \operatorname{sgn}(\xi - \zeta).$$

Прирівнюючи радіальні переміщення заповнювача та оболонки у зоні проковзування згідно з умовою (2) та враховуючи закон Кулона (4), отримуємо

$$\frac{R}{E} \left\{ (1-\nu)\sigma(\zeta) - \nu \left[-p - \frac{l}{R} f \int_{T'} \sigma(\xi) \operatorname{sgn} \xi \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) d\xi \right] \right\} = -k^4 \int_{T''} G(\zeta, \xi) \sigma(\xi) d\xi.$$

Отримане співвідношення зводиться до інтегрального рівняння з невідомими межами інтегрування

$$\sigma(\zeta) + \int_{T'} K(\xi, \zeta) \sigma(\xi) d\xi = -\frac{\nu}{1-\nu} P, \quad \zeta \in T'. \quad (12)$$

Ядро інтегрального рівняння має вигляд

$$K(\xi, \zeta) = -\frac{\nu}{1-\nu} l f \operatorname{sgn} \zeta \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) + 4\mu^4 G(\zeta, \xi), \quad (13)$$

де $4\mu^4 = \frac{1}{1-\nu} \frac{l^4 b E}{R I_x E_0}$.

Для визначення невідомих координат точок поділу зон проковзування та відлипання використовуємо умову (3), яку запишемо у вигляді

$$\sigma(\pm a) = 0. \quad (14)$$

Розв'язок системи рівнянь (12), (14) отримано методом квадратур, з використанням формули трапецій з рівномірною сіткою вузлів [6]. При розв'язуванні застосовано метод послідовних наближень масиву вузлових значень контактної напруженості і невідомих координат $\pm a$, розглянутий у роботі [5]. В результаті розв'язку отримано таблицю значень контактних напружень

$$\sigma_i = \sigma(\zeta_i), \quad i = \overline{1, n},$$

де $\zeta_j = -1 + (j-1)g$; $g = 2/(n-1)$ – сталий крок інтегрування; n – кількість вузлів у методі квадратур. Знаючи контактні напруження, можна знайти всі необхідні характеристики оболонкової системи.

Аналіз результатів числового розв'язку задачі. Дослідження проводилися для контактної системи з такими параметрами: $h/R = 0,1$; $E/E_0 = 0,0001$; $\nu = 0,499$. Число розрізів оболонки та їх довжина варіюються. Розглянемо вплив довжини заповнювача

на напружено-деформований стан елементів контактної системи та її основні характеристики.

На рис.2 наведено розподіл безрозмірного контактного тиску σ/P по довжині оболонки при $f = 0,5$; $l/R = 4,0$; $N = 6$ для констукцій з однаковою $\gamma = 1$ (пунктирна лінія) та меншою $\gamma = 0,75$ (суцільна лінія) довжиною заповнювача від оболонки. Як бачимо, зменшення довжини заповнювача призводить до збільшення контактного тиску між оболонкою та заповнювачем.

Одними із основних характеристик контактної системи є її жорсткість та несуча здатність. Жорсткість контактної системи визначається величиною осьового переміщення поршнів. На рис.3 наведено залежність осьового переміщення торців заповнювача $\delta E/P_R$ від безрозмірної довжини l/R . Позначення кривих аналогічні позначенням попереднього рисунка. Зі збільшенням безрозмірної довжини осьові переміщення поршнів зростають інтенсивніше для контактної системи з меншою довжиною заповнювача. Такий ефект можна пояснити збільшенням контактного напруження між заповнювачем та оболонкою в зоні їх спряження, що зумовлює зростання радіального прогину панелей системи ($\gamma = 0,75$) у порівнянні з контактною системою при $\gamma = 1$. Це призводить до збільшення радіального переміщення контактної поверхні заповнювача, внаслідок чого зростає і осьове переміщення поршнів. При $l/R = 4,0$ податливість розглядуваної механічної системи збільшується на 35% від величини осьового переміщення торців для конструкції з однаковими довжинами контактних тіл.

Розглянемо вплив довжини заповнювача на несучу здатність контактної системи. Розрахунок на міцність проводимо за найбільшими нормальними напруженнями, які виникають у прорізній оболонці. Максимальні напруження виникають в торцевих перерізах панелей. На рис.4 наведено залежність $\sigma_{\zeta \max}/P$ від безрозмірної довжини для розглядуваних контактних систем. Як бачимо, маємо зростання величини $\sigma_{\zeta \max}$ при зростанні довжини конструкції. Несуча здатність контактної системи ($\gamma = 0,75$) є меншою в порівнянні з конструкцією з однаковими довжинами контактних тіл.

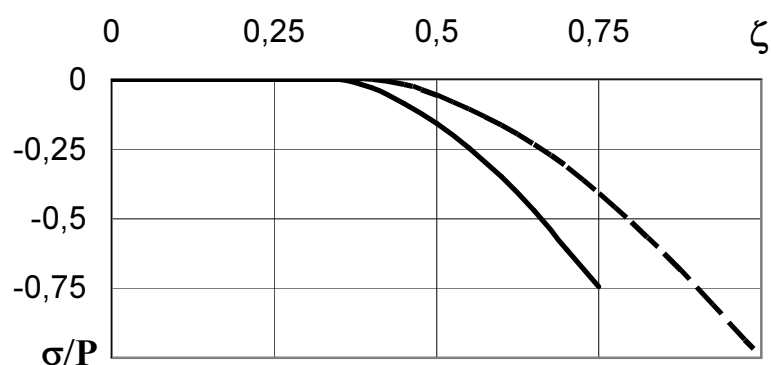


Рисунок 2. Розподіл контактного тиску по довжині системи

Figure 2. Contact pressure distribution along the length of the system

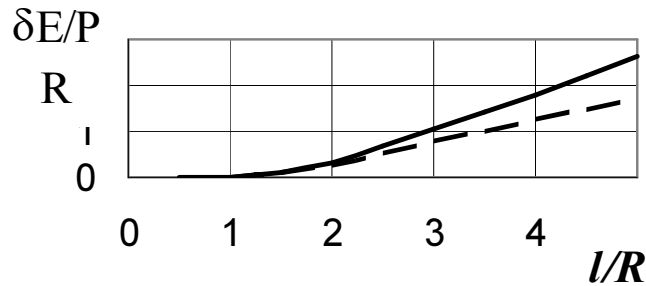


Рисунок 3. Залежність осевого переміщення торців заповнювача від довжини оболонки

Figure 3. Dependence of the axial movement of the filler ends on the length shell

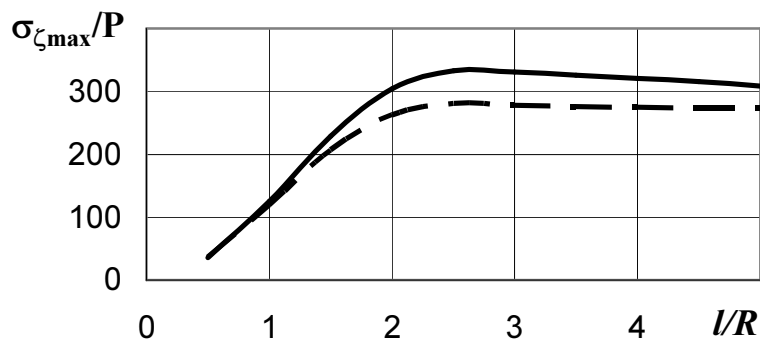


Рисунок 4. Зміна безрозмірних максимальних нормальних напружень у панелях оболонки від її довжини

Figure 4. Change of the dimensionless maximum normal stresses in the shell panels on the length

Висновки. Встановлено, що зменшення довжини заповнювача призводить до підвищення контактної тиску заповнювача на оболонку, зменшення жорсткості пружної системи, зниження несучої здатності панелей прорізної оболонки. Результати даних досліджень можуть бути використані при проектуванні оболонкових пружних елементів.

Conclusions. It has been established that the reduce of the filler length results in a rise of the contact pressure of the filler on the shell, reduce of the carrying capacity of the panels slotted cylindrical shell, and a decrease in the bearing capacity of the contact system. The results of these studies can be used in the design of shell elastic elements.

Список використаної літератури

1. Шопа, В. М. Оболонкові пружини [Текст] / В. М. Шопа, А. С. Величкович, С. В. Величкович та ін. – Івано-Франківськ: Факел, 2002. – 92 с.
2. А. с. 637572 СССР, МКИ F 16 F 1/40. Упругий елемент [Текст] / В. М. Шопа, С. В. Величкович; опубл. 15. 12. 78 г., Бюл. № 46.
3. Попадюк, І. Й. Механіка фрикційного контакту оболонок з деформівним заповнювачем [Текст] / І. Й. Попадюк, І. П. Шацький, В. М. Шопа. – Івано-Франківськ: Факел, 2003. – 180 с.
4. Шопа, В. М. Фрикційна взаємодія прорізної циліндричної оболонки з пружним заповнювачем [Текст] / В. М. Шопа, І. П. Шацький, О. О. Бедзір // Доп. АН України. – 1993. – №8. – С. 70–73.
5. Бедзір, О. О. Методика розв'язування змішаних задач про фрикційний контакт заповнювача з прорізним оболонковим елементом [Текст] / О. О. Бедзір, І. П. Шацький, В. М. Шопа // Мат. методи та фіз. -мех. поля. – 2004. – Т. 47, №1. – С. 111–114.

6. Верлань, А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: справочное пособие [Текст] / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. – Киев: Наук. думка, 1986. – 544 с.

Отримано 18.03.2015