

Степанченко О. М. Метод скінченних елементів в задачах вилуговування вапна з бетонних фундаментів гідротехнічних споруд / Ольга Миколаївна Степанченко, Петро Миколайович Мартинюк // Вісник ТНТУ, — Т. : ТНТУ, 2015. — Том 79. — № 3. — С. 174-182. — (Математичне моделювання. Математика. Фізика).

УДК 532.72: 534.4: 519.63

**О. Степанченко, канд. техн. наук;
П. Мартинюк, докт. техн. наук**

*Національний університет водного господарства та
природокористування*

МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ В ЗАДАЧАХ ВИЛУГОВУВАННЯ ВАПНА З БЕТОННИХ ФУНДАМЕНТІВ ГІДРОТЕХНІЧНИХ СПОРУД

***Резюме.** Сформовано нелінійну математичну модель вилуговування водорозчинних складових бетонного фундаменту (вапна) в двох вимірній постановці. Отримано чисельний розв'язок даної задачі методом скінченних елементів. Проведено чисельні експерименти з дослідження розподілу розчинених речовин у ґрунті та оцінювання межі корозії бетонного фундаменту.*

***Ключові слова:** вилуговування, математичне моделювання, метод скінченних елементів.*

O. Stepanchenko; P. Martinyuk

FINITE ELEMENTS METHOD IN PROBLEMS OF LIME LIXIVIATION FROM THE CONCRETE BASES OF HYDRO TECHNICAL CONSTRUCTIONS

***Summary.** The ecological, economical and technogenic safety of the state and region is connected with the hydro-technical constructions operation fail-safety. One of the prediction methods, which does not need expensive experiments, is mathematical modeling. The non-linear mathematical model of the process of the lime lixiviation from the concrete bases of hydro-technical constructions was analysed. The non-linearity deals with taking into consideration the dependencies of the diffusion and water filtration coefficients on the salts concentration, as well as the chemical and thermal osmosis phenomenon, including thermal diffusion. The problem is of the Stephan's type problems, as the corrosion border of the concrete basement is travelling. This contributes to the difficulties in finding the algorithms for of the approximate solutions for the relevant boundary problems. In the previous authors' works for the finite differences method was used to solve these problems. But the precision of the approximate solutions was not reached. One of the ways to solve the problem is to compare the numerical solutions of the non-linear boundary problem, which were found using different similar methods. This is the aim of the article. As far as methods are concerned, the finite differences method and the finite elements method were chosen. The positive aspect in comparing this two methods is as follows – with the finite differences method we get the classical solution, and with the finite elements method – a generalized solution. One of the stages in achieving the final goal has been reached in this article – the scheme of approximate solution with the finite elements method is described. The program realization of the formed problem's solution with the finite elements method has been realized in Lazarus – free software development environment for Free Pascal compiler. This integrated development environment provides an opportunity of cross platform creation of Delphi-like ads. The developed program allows changing the incoming data dynamically; controlling the area fragmentation and receiving the calculation results in graphical or numerical (in the table form) view.*

***Key words:** lixiviation, mathematical modelling, finite element method.*

Постановка проблеми. Безаварійність експлуатації гідротехнічних споруд (ГТС) пов'язана з економічною, екологічною та техногенною безпекою держави, а також безпосередньо стосується життя людей. Часто аварії на ГТС спричиняли, окрім матеріальних збитків, ще й значні людські жертви [1, 2]. Математичне моделювання складних фізико-хімічних процесів у бетонних основах ГТС дозволяє спрогнозувати перебіг процесів, без проведення енергоємніших та ресурсозатратних натурних

експериментів, для передбачення критичних ситуацій та недопущення аварій.

Аналіз останніх досліджень. В роботах [3–7] побудовано нелінійні математичні моделі досліджуваних процесів. Для розв’язування відповідних нелінійних крайових задач в областях з рухомими межами застосовано метод скінченних різниць разом із методом конформних та квазіконформних відображень для побудови ортогональних різницевих сіток. Однак питання про точність таких відображень та їх вплив на точність наближених розв’язків нелінійних крайових задач досліджено не було. Ці дослідження є складною задачею, оскільки пов’язані з аналізом наближених розв’язків обернених задач математичної фізики. Такі дослідження простіше провести у випадку застосування методів, для яких накопичено значний науковий доробок з теоретичного аналізу точності наближених розв’язків. Наприклад, таким добре теоретично обґрунтованим методом є метод скінченних елементів (МСЕ) [8–10].

Мета роботи. Застосування методу скінченних елементів до задач вилуговування водорозчинних порід з бетонних фундаментів ГТС. Однак це один із етапів загальної мети – теоретичне встановлення точності наближених розв’язків вказаних крайових задач, яка може бути досягнута в серії наукових публікацій.

Постановка задачі. Розглянемо задачу корозії бетонного фундаменту ГТС, який знаходиться на водопроникній ґрунтовій основі товщиною b_1 , що лежить на водоупорі (рис. 1). Внаслідок різниці напорів у верхньому та нижньому б’єфах відбувається фільтрація води в бетонному фундаменті зі швидкістю \vec{V}_1 та в ґрунтовій основі зі швидкістю \vec{V}_2 . Оскільки бетон є пористим середовищем, то внаслідок омивання його фільтраційним потоком підземних вод відбувається розчинення його водорозчинних складових з подальшим винесенням їх за рахунок масопереносу. В результаті з часом буде зменшуватись концентрація водорозчинних частин бетону (вапна та ін.).

Завдання полягає у розрахунку еволюції зони корозії бетонного фундаменту, розподілу концентрації вапна в ґрунтовій основі та в бетоні протягом заданого проміжку часу. В лінійній постановці подібні задачі були розглянуті в роботах [11-13].

Математична модель задачі. Розглянемо задачу вилуговування вапна з бетону при відсутності фільтрації в бетоні. Будемо вважати, що фільтрація відбувається лише в ґрунті. Математична модель цієї задачі описується такою нелінійною крайовою задачею:

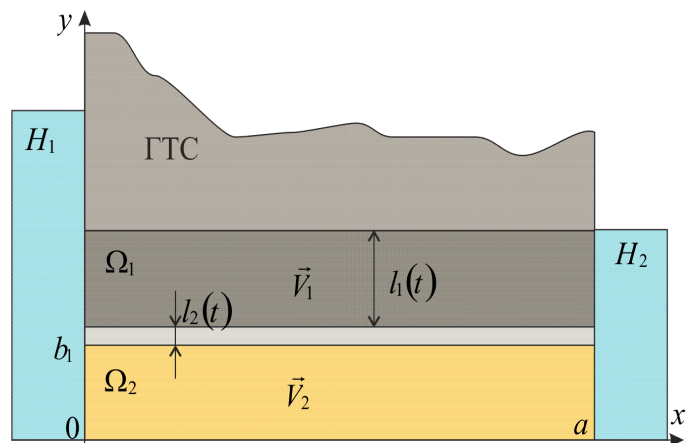


Рисунок 1. Область фільтрації ґрунтової основи ГТС, зон корозії та промочування її бетонного фундаменту

Figure 1. The filtration region of the soil base of a hydro technical construction, zones of corrosion and drench of base concrete base

$$\frac{\partial \left(D_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(D_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial y} \right)}{\partial y} - V_{2x}(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x} - \gamma_2(c_2 - C_{m2}) + \quad (1)$$

$$+ \frac{\partial \left(D_T \frac{\partial T}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(D_T \frac{\partial T}{\partial y} \right)}{\partial y} = \sigma_2 \frac{\partial c_2}{\partial t}, \quad (x, y) \in \Omega_2, \quad t > 0,$$

$$\frac{\partial \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right)}{\partial y} - V_{2x} \rho C_\rho \frac{\partial T}{\partial x} = C_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (x, y) \in \Omega_2, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$\vec{V}_2 = -k_1(c_2) \text{grad } h, \quad \text{div } \vec{V}_2 = 0, \quad (x, y) \in \Omega_2, \quad (3)$$

$$h(0, y) = H_1, \quad h(a, y) = H_2, \quad \left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_{y=0, y=b_1+l_2(t)} = 0, \quad (4)$$

$$T(0, y, t) = T_1(y, t), \quad T(a, y, t) = T_2(y, t), \quad y \in [0, b_1], \quad t > 0, \quad (5)$$

$$T(x, 0, t) = T_3(x, t), \quad T(x, b_1, t) = T_4(x, t), \quad x \in [0, a], \quad t > 0, \quad (6)$$

$$c_2(0, y, t) = \tilde{C}_2^1(y, t), \quad \left. \frac{\partial c_2}{\partial x} \right|_{x=a} = 0, \quad y \in [0, b_1], \quad \left. \frac{\partial c_2(x, 0, t)}{\partial y} \right|_{x=0} = 0, \quad x \in [0, a], \quad (7)$$

$$\left(\delta \frac{\partial c_2}{\partial y} \right) \Big|_{y=b_1+l_2(t)} = C_{m2}, \quad x \in [0, a], \quad t > 0, \quad (8)$$

$$\frac{dl_2}{dt} = - \frac{D_2(c) \rho_2}{(1-\sigma) \vartheta \rho_B} \cdot \frac{\partial c_2(x, b_1+l_2(l), t)}{\partial y}, \quad x \in [0, a], \quad t > 0, \quad (9)$$

$$c_2(x, y, 0) = C_0^2(x, y), \quad T(x, y, 0) = T_0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}_2, \quad (10)$$

де $c(x, y, t)$ – масова концентрація (масова частка) речовини в рідкій фазі; C_m – масова концентрація (масова частка) речовини граничного насичення; C_ρ – питома теплоємність порового розчину; C_T – об’ємна теплоємність ґрунту; $\tilde{C}(x, y, t)$ – концентрація (масова частка) розчинених речовин в околі межі Γ_1 ; $\mathbf{D}(c) = \{D_{ij}(c)\}$ – тензор коефіцієнта молекулярної дифузії; $\mathbf{D}_T(c) = \{D_{Tij}(c)\}$ – тензор коефіцієнта термодифузії; δ – товщина дифузійного примежового шару в околі фронту розчинення; $\lambda(c) = \{\lambda_{ij}(c)\}$ – тензор коефіцієнтів ефективної теплопровідності вологого ґрунту; $\nu(x, c)$ – коефіцієнт хімічного осмосу; ρ – густина порової рідини; ρ_B – густина розчинної речовини в твердій фазі; ϑ – масова (об’ємна) частка розчинної речовини в твердому тілі; σ – пористість середовища, ґрунту.

Схема застосування методу скінченних елементів. Нехай H_0 – простір вектор-функцій $\mathbf{s}(x, y) = (s_1(x, y); s_2(x, y); s_3(x, y))$, кожна із компонент $s_i(x, y)$, $i = \overline{1, 3}$

яких в області Ω_2 належать простору Соболева $W_2^1(\Omega_2)$, причому $s_1(x, y)$, $s_2(x, y)$ та $s_3(x, y)$ набувають нульових значень на тих частинах межі області Ω_2 , де відповідно для функцій $h(x, y)$, $c(x, y, t)$, $T(x, y, t)$ задані граничні умови першого роду.

Використовуючи стандартну процедуру: домноживши рівності (1) – (3) та кожну з початкових умов (10) відповідно на довільні функції $s_1(x, y)$, $s_2(x, y)$, $s_3(x, y)$, такі, що $(s_1(x, y); s_2(x, y); s_3(x, y)) \in H_0$, інтегруючи їх по області Ω_2 , застосовуючи формулу Остроградського-Гауса та враховуючи умови (4) – (8), отримаємо

$$\iint_{\Omega_2} \tilde{k}_1(c_2) \left(\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial s_1}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial s_1}{\partial y} \right) dx dy = 0, \forall t \in (0; t_0]; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega_2} \sigma_2 \frac{\partial c_2}{\partial t} s_2(x, y) dx dy + \iint_{\Omega_2} D_2(c_2) \left(\frac{\partial c_2}{\partial x} \frac{\partial s_2}{\partial x} + \frac{\partial c_2}{\partial y} \frac{\partial s_2}{\partial y} \right) dx dy + \\ & + \iint_{\Omega_2} D_T \left(\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial s_2}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial s_2}{\partial y} \right) dx dy + \iint_{\Omega_2} V_{2x}(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x} s_2(x, y) dx dy + \\ & + \gamma_2 \iint_{\Omega_2} c_2 s_2(x, y) dx dy + \frac{1}{\delta} \int_0^a D_2(c_2) \cdot c_2 \cdot s_2(x, b_1) dx = \end{aligned} \quad (12)$$

$$= \gamma_2 C_{m2} \iint_{\Omega_2} s_2(x, y) dx dy + \frac{C_{m2}}{\delta} \int_0^a D_2(c_2) \cdot s_2(x, b_1) dx, \quad \forall t \in (0; t_0];$$

$$\iint_{\Omega_2} c_2(x, y, 0) s_2(x, y) dx dy = \iint_{\Omega_2} \tilde{C}_0^2(x, y) s_2(x, y) dx dy, \quad (13)$$

$$c_T \iint_{\Omega_2} \frac{\partial T}{\partial t} s_3(x, y) dx dy + \iint_{\Omega} \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial s_3}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial s_3}{\partial y} \right) dx dy + \quad (14)$$

$$+ \rho c_p \iint_{\Omega_2} V_{2x}(c_2) \frac{\partial T}{\partial x} s_3(x, y) dx dy = 0, \quad \forall t \in (0; t_0];$$

$$\iint_{\Omega_2} T(x, y, 0) s_3 dx dy = \iint_{\Omega_2} T_0(x, y) s_3 dx dy, \quad (15)$$

$\forall (s_1(x, y); s_2(x, y); s_3(x, y)) \in H_0$.

Значення сіткових чисел Пекле рівнянь (1), (2) визначаються таким чином:

$$Pe_c = \frac{1}{2} h_e \frac{\|V_{2x}\|}{\|D_2\|}, \quad Pe_T = \frac{1}{2} h_e \frac{\|\rho C_p V_{2x}\|}{\|\lambda\|}.$$

В якості норми, як правило, приймається рівномірна норма на скінченних елементах. Вони можуть бути більшими за одиницю. Тому чисельний розв'язок крайової задачі (1) – (10), побудований за класичною схемою Гальоркіна, може сильно осцилювати в усій області визначення. Тут h_e - максимальна довжина сторони в усіх скінченних елементах. Тому для стабілізації чисельних розв'язків вказаних рівнянь використовуємо протипотокову схему Петрова-Гальоркіна [8, 9]. Згідно з вказаною схемою, рівності (12), (14) замінюються наступними:

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\Omega_2} \left(\sigma_2 \frac{\partial c_2}{\partial t} s_2(x, y) + D_2(c_2) \left(\frac{\partial c_2}{\partial x} \frac{\partial s_2}{\partial x} + \frac{\partial c_2}{\partial y} \frac{\partial s_2}{\partial y} \right) + D_T \left(\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial s_2}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial s_2}{\partial y} \right) \right) dx dy + \\
 & \quad + \iint_{\Omega_2} \left(V_{2x}(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x} + \gamma_2(c_2 - C_{m2}) \right) s_2(x, y) dx dy + \\
 & + \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(c)} \iint_{\Omega_e} \left(\sigma_2 \frac{\partial c_2}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(D_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(D_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(D_T \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(D_T \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \right. \\
 & \quad + V_{2x}(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x} + \gamma_2(c_2 - C_{m2}) V_{2x}(c_2) \frac{\partial s_2}{\partial x} \Big) dx dy + \frac{1}{\delta} \int_0^a D_2(c_2) \cdot c_2 \cdot s_2(x, h) dx = \\
 & \quad = \frac{C_{m2}}{\delta} \int_0^a D_2(c_2) \cdot c_2 \cdot s_2(x, h) dx;
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\Omega_2} \left(C_T \frac{\partial T}{\partial t} s_3(x, y) + \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial s_3}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial s_3}{\partial y} \right) + \rho C_p V_{2x} \frac{\partial T}{\partial x} s_3(x, y) \right) dx dy + \\
 & \quad + \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(T)} \iint_{\Omega_e} \left(C_T \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p V_{2x} \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \rho C_p V_{2x} \frac{\partial s_3}{\partial x} \right) dx dy = 0;
 \end{aligned} \tag{17}$$

де $\Omega_2 = \bigcup \Omega_e$, Ω_e – скінченні елементи; $\tau_e^{(c)}$, $\tau_e^{(T)}$ – параметри регуляризації.

Покриємо замикання $\bar{\Omega}_2$ області Ω_2 скінченно-елементною сіткою із загальною кількістю вузлів N . Тоді наближений розв’язок задачі (1)-(10) шукаємо у вигляді

$$\hat{h}(x, y) = \sum_{j=1}^N h_j \phi_j(x, y), \quad \hat{c}_2(x, y, t) = \sum_{j=1}^N c_j(t) \phi_j(x, y), \quad \hat{T}(x, y, t) = \sum_{j=1}^N T_j(t) \phi_j(x, y), \tag{18}$$

де h_j , $c_j(t)$, $T_j(t)$ – невідомі коефіцієнти; $\phi_j(x, y)$ – поліноміальні базисні функції методу скінченних елементів.

Підставляючи (18) в рівності (11), (16), (17) (13), (15), а функції $s_1(x, y)$, $s_2(x, y)$ та $s_3(x, y)$ покладаючи рівною кожній базисній функції $\phi_i(x, y)$, $i = \overline{1, N}$, отримуємо задачу Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь відносно векторів невідомих $\mathbf{H}(t)$, $\mathbf{C}(t)$, $\mathbf{T}(t)$

$$\mathbf{M}^{(3)}(\mathbf{H}, \mathbf{C}, \mathbf{T}) \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \mathbf{L}^{(3)}(\mathbf{H}, \mathbf{C}, \mathbf{T}) \cdot \mathbf{T}(t) = \mathbf{F}^{(3)}(\mathbf{H}, \mathbf{C}, \mathbf{T}), \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{M}^{(2)}(\mathbf{H}, \mathbf{C}, \mathbf{T}) \cdot \frac{d\mathbf{C}}{dt} + \mathbf{L}^{(2)}(\mathbf{H}, \mathbf{C}, \mathbf{T}) \cdot \mathbf{C}(t) = \\
 & = \mathbf{G}^{(2)}(\mathbf{H}, \mathbf{C}, \mathbf{T}) \cdot \mathbf{T}(t) + \mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{H}, \mathbf{C}, \mathbf{T}),
 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{C}, \mathbf{T}) \cdot \mathbf{H}(t) = \mathbf{F}^{(1)}, \tag{21}$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(2)} \cdot \mathbf{C}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(2)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(3)} \cdot \mathbf{T}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(3)}, \tag{22}$$

де

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{H} = (h_i)_{i=1}^N, \quad \mathbf{C} = (c_i(t))_{i=1}^N, \quad \mathbf{C}^{(0)} = (c_i(0))_{i=1}^N, \quad \mathbf{T} = (t_i(t))_{i=1}^N, \quad \mathbf{T}^{(0)} = (t_i(0))_{i=1}^N, \quad \mathbf{M}^{(3)} = (m_{ij}^{(3)})_{i,j=1}^N, \\
 & \mathbf{L}^{(3)} = (l_{ij}^{(3)})_{i,j=1}^N, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(3)} = (\tilde{m}_{ij}^{(3)})_{i,j=1}^N, \quad \tilde{\mathbf{F}}^{(3)} = (\tilde{f}_i^{(3)})_{i=1}^N, \quad \mathbf{F}^{(3)} = (f_i^{(3)})_{i=1}^N, \quad \mathbf{M}^{(2)} = (m_{ij}^{(2)})_{i,j=1}^N,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{M}}^{(2)} &= (\tilde{m}_{ij}^{(2)})_{i,j=1}^N, \quad \mathbf{L}^{(2)} = (l_{ij}^{(2)})_{i,j=1}^N, \quad \mathbf{G}^{(2)} = (g_{ij}^{(2)})_{i,j=1}^N, \quad \mathbf{F}^{(2)} = (f_i^{(2)})_{i=1}^N, \quad \tilde{\mathbf{F}}^{(2)} = (\tilde{f}_i^{(2)})_{i=1}^N, \\
 \mathbf{M}^{(1)} &= (m_{ij}^{(1)})_{i,j=1}^N, \quad \mathbf{L}^{(1)} = (l_{ij}^{(1)})_{i,j=1}^N, \quad \mathbf{F}^{(1)} = (f_i^{(1)})_{i=1}^N, \\
 \tilde{m}_{ij}^{(3)} &= \iint_{\Omega_2} \phi_i \phi_j dx dy, \quad \tilde{m}_{ij}^{(2)} = \iint_{\Omega_2} \phi_i \phi_j dx dy, \\
 m_{ij}^{(3)} &= C_T \left(\iint_{\Omega_2} \phi_i \phi_j dx dy + \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(T)} \int_{\Omega_e} \rho C_\rho \phi_j V_{2x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) dx dy, \quad \tilde{f}_i^{(3)} = \iint_{\Omega_2} \tilde{T}_0 \phi_i dx dy, \\
 l_{ij}^{(3)} &= \iint_{\Omega_2} \left(\lambda \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right) + \rho C_\rho V_{2x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) dx dy + \\
 &+ \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(T)} \iint_{\Omega_e} \rho C_\rho \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) \right) + \rho C_\rho V_{2x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} V_{2x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} dx dy, \\
 m_{ij}^{(2)} &= \sigma_2 \left(\iint_{\Omega_2} \phi_i \phi_j dx dy + \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(T)} \int_{\Omega_e} \phi_j V_{2x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) dx dy, \quad \tilde{f}_i^{(2)} = \iint_{\Omega_2} \tilde{C}_0^2 \phi_i dx dy, \\
 g_{ij}^{(2)} &= - \iint_{\Omega_2} D_T \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right) dx dy - \\
 &- \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(T)} \iint_{\Omega_e} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(D_T \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_T \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) \right) V_{2x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} dx dy, \\
 l_{ij}^{(2)} &= \iint_{\Omega_2} \left(D \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right) + \phi_i V_{2x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \gamma_2 \phi_i \phi_j \right) dx dy + \\
 \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(T)} \iint_{\Omega_e} \left(- \frac{\partial}{\partial x} \left(D_T \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(D_T \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) + V_{2x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \gamma_2 \phi_j \right) V_{2x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} dx dy \\
 f_i^{(2)} &= \gamma_2 C_{m2} \iint_{\Omega_2} \phi_i dx dy + \gamma_2 C_{m2} \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(T)} \iint_{\Omega_e} V_{2x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} dx dy, \\
 m_{ij}^{(1)} &= \iint_{\Omega_2} \phi_i \phi_j dx dy, \quad l_{ij}^{(1)} = - \iint_{\Omega_2} \tilde{k}_1 \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right) dx dy \\
 l_{ij}^{(2)} &= \iint_{\Omega} \left((\mathbf{D} \nabla \phi_j, \nabla \phi_i) + \phi_i (\mathbf{V}, \nabla \phi_j) + \gamma_1 \phi_i \phi_j \right) dx dy + \\
 &+ \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(c)} \iint_{\Omega_e} \left(- \nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla \phi_j) + (\mathbf{V}, \nabla \phi_j) + \gamma_1 \phi_j \right) (\mathbf{V}, \nabla \phi_i) dx dy,
 \end{aligned}$$

Параметри регуляризації $\tau_e^{(T)}$, $\tau_e^{(c)}$ в (16), (17) згідно з [9] вибираються таким чином:

$$\tau_e^{(T)} = \frac{h_e}{a \|\rho C_\rho V_{2x}\|_{\infty, e}} \gamma(Pe_T), \quad \tau_e^{(c)} = \frac{h_e}{a \|V_{2x}\|_{\infty, e}} \gamma(Pe_c),$$

де $a = 3$, $\gamma(z) = \begin{cases} z, & 0 \leq z \leq 1; \\ 1, & 1 \leq z < \infty. \end{cases}$

Для знаходження чисельного розв'язку задачі Коші (19) – (22) поділимо

часовий відрізок $[0; t_0]$ на m_1 однакових частин з кроком $\tau = \frac{t_0}{m_1}$. З цією метою позначимо через $\mathbf{H}^{(j)}$; $\mathbf{C}^{(j)}$; $\mathbf{T}^{(j)}$ - наближені розв'язки задачі Коші (19) – (22) при $t = j\tau$, $j = \overline{0, m_1}$. Наближений розв'язок системи нелінійних диференціальних рівнянь (19) – (21) отримуємо за допомогою повністю неявної різницевої схеми, лінійної відносно шуканих функцій [10].

Для прикладу розглянемо рівняння (19). Маємо

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(3)}(\mathbf{H}^{(j)}, \mathbf{C}^{(j)}, \mathbf{T}^{(j)}) \frac{\mathbf{T}^{(j+1)} - \mathbf{T}^{(j)}}{\tau} + \mathbf{L}^{(3)}(\mathbf{H}^{(j)}, \mathbf{C}^{(j)}, \mathbf{T}^{(j)}) \mathbf{T}^{(j+1)} = \\ = \mathbf{F}^{(3)}(\mathbf{H}^{(j)}, \mathbf{C}^{(j)}, \mathbf{T}^{(j)}), \quad j = \overline{0, m_1 - 1}. \end{aligned}$$

Як результат, відшукування $\mathbf{T}^{(j+1)}$ зводиться до розв'язання СЛАР

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\tau} \mathbf{M}^{(3)}(\mathbf{H}^{(j)}, \mathbf{C}^{(j)}, \mathbf{T}^{(j)}) + \mathbf{L}^{(3)}(\mathbf{H}^{(j)}, \mathbf{C}^{(j)}, \mathbf{T}^{(j)}) \mathbf{T}^{(j+1)} \right) = \\ = \frac{1}{\tau} \mathbf{M}^{(3)}(\mathbf{H}^{(j)}, \mathbf{C}^{(j)}, \mathbf{T}^{(j)}) \mathbf{T}^{(j)} + \mathbf{F}^{(3)}(\mathbf{H}^{(j)}, \mathbf{C}^{(j)}, \mathbf{T}^{(j)}), \quad j = \overline{0, m_1 - 1}. \end{aligned}$$

На початковому часовому шарі значення $\mathbf{C}^{(0)}$, $\mathbf{T}^{(0)}$ отримуємо зі СЛАР (22). Значення $\mathbf{H}^{(j)}$ $j = \overline{0, m_1}$ знаходимо зі СЛАР (21), прийнявши залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації та температури, взятих з попереднього часового шару.

Результати чисельних експериментів та їх аналіз. Програмна реалізація розв'язання сформованої задачі методом скінченних елементів здійснена в середовищі Lazarus – вільним середовищем розроблення програмного забезпечення для компілятора Free Pascal. Дане інтегроване середовище розробки надає можливість кросплатформенного створення Delphi-подібних додатків. Розроблена програма дозволяє динамічно змінювати вхідні дані, керувати розбиттям області та отримувати результати обчислень, як в графічному так і числовому (у вигляді таблиць) вигляді.

Чисельні експерименти проводилися при таких даних

$$\begin{aligned} a = 4m; \quad b = 4,5m; \quad H_1 = 10m; \quad H_2 = 5m; \quad \tau = 30 \text{ дiб}; \quad D = 9,3 \cdot 10^{-5}, \frac{m^2}{\text{доб}}, \\ D_T = 7,5 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{\text{доб} \cdot K}; \quad \sigma_2 = 0,4; \quad C_m = 1,7 \cdot 10^{-3}; \quad k = 8,64 \cdot \frac{m}{\text{доб}}; \quad \lambda = 0,58 \frac{Вт}{m \cdot K}, \\ C_\rho = 4,2 \cdot 10^3 \frac{Дж}{кг \cdot K}, \quad C_T = 2,1 \cdot 10^6 \frac{Дж}{m^3 \cdot K}; \quad 10^0 C \leq \tilde{T}_0, \tilde{T}_1, \tilde{T}_2 \leq 15^0 C. \end{aligned}$$

Кількість скінченних елементів – 1906; кількість вузлів – 3965; степінь базисних функцій – 2.

Результати чисельних експериментів даної крайової задачі представлені на рис. 2, де наведена об'ємна візуалізація поля концентрації в області ґрунтового середовища. В таблицях 1 та 2 наведено значення координат та зміщення точок межі корозії в процесі вилуговування протягом 60-ти років. Отримані дані для цієї модельної задачі можуть бути легко адаптовані для конкретних практичних задач з метою проведення прогнозних розрахунків.

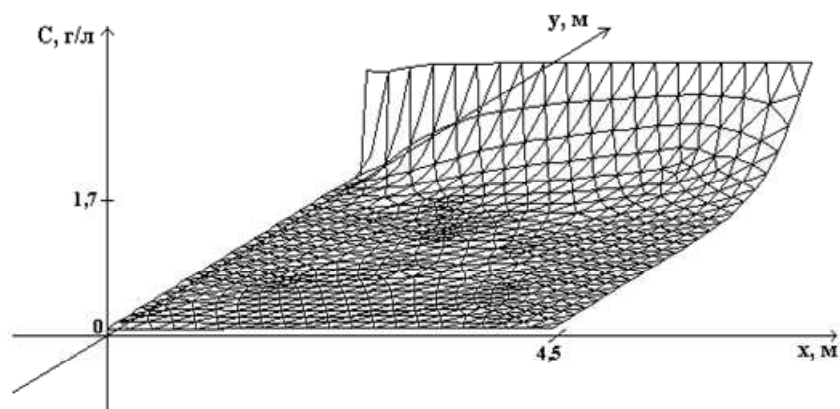


Рисунок 2. Об’ємна візуалізація розподілу концентрації вапна в пористому просторі ґрунту через 60 років (пористість ґрунту 0,4, в ґрунті відбувається фільтрація води)

Figure 2. Volumetric visualization of the lime concentration distribution in the soil porous space in 60 years (oil porosity – 0.4, water filtration occurs)

Таблиця 1

Чисельні експерименти визначення координат точок межі корозії

x (метри)	t=(рік)	Координати точок рухомої межі (метри)					
		0	1	10	30	40	60
0,2		4,5	4,500205	4,502047	4,506097	4,508100	4,512063
0,6		4,5	4,500205	4,502044	4,506062	4,508037	4,511922
1		4,5	4,500206	4,502044	4,506043	4,508000	4,511833
1,6		4,5	4,500205	4,502036	4,506001	4,507933	4,511705
2		4,5	4,500204	4,502027	4,505970	4,507890	4,51163
2,6		4,5	4,500204	4,502022	4,505948	4,507857	4,511574
3		4,5	4,500202	4,502006	4,505904	4,507800	4,511494
3,6		4,5	4,500172	4,501707	4,505049	4,506687	4,509897
4		4,5	4,500058	4,500573	4,501687	4,502229	4,503285

Таблиця 2

Чисельні експерименти визначення зміщення точок межі корозії

x (метри)	t=(рік)	Зміщення точок рухомої межі (метри)					
		0	1	10	30	40	60
0,2		0	0,000203	0,002046	0,006094	0,008097	0,012066
0,6		0	0,000207	0,002048	0,006060	0,008035	0,011922
1		0	0,000208	0,002045	0,006042	0,007998	0,011832
1,6		0	0,000205	0,002038	0,006002	0,007933	0,011705
2		0	0,000205	0,002029	0,005969	0,007888	0,011631
2,6		0	0,000206	0,002024	0,005949	0,007858	0,011574
3		0	0,000205	0,002009	0,005905	0,007799	0,011495

3,6		0	0,000173	0,001708	0,005048	0,006686	0,009897
4		0	0,0000875	0,000574	0,001686	0,002228	0,003284

Висновки. Побудовано математичну модель задачі вилуговування вапна з бетонного фундаменту ГТС у двовимірній постановці. Враховано нелінійні ефекти фільтрації в бетоні в ізотермічних та неізотермічних умовах на основі диференціальних рівнянь молекулярної та конвективної дифузії, термодифузії, теплопереносу, з крайовими умовами в лінійній та нелінійній постановці. Методом скінченних елементів знайдено чисельні розв'язки відповідної крайової задачі та виконано програмну реалізацію розробленого алгоритму. Чисельні експерименти дозволяють встановити розподіл концентрації в області в різні моменти часу і тим самим дослідити міграцію розчиненої речовини в ґрунті.

Conclusions. The mathematical model of lime lixiviation from the concrete bases of hydro-technical constructions has been built in two-dimensional formulation. The nonlinear filtration effects in isothermal and non-isothermal conditions were taken into consideration based on the differential equation of convectional diffusion, thermal diffusion and transfer, with boundary conditions in linear and non-linear formulation. Taking advantage of the finite elements method the numerical solutions to the boundary problem has been found, and the program realization of the developed algorithm has been made. Numerous experiments let establish the lime concentration distribution in different instances in time, and therefore examine the migration of the diluted substance in soil.

Список використаної літератури

1. Стефанишин, Д.В. Прогнозирование аварийности проектируемых и строящихся плотин на основе результатов статистического анализа произошедших аварий [Текст] / Д.В. Стефанишин // Известия ВНИИГ им. Б.Е.Веденеева. – 2008. – Т. 251. – С. 3 – 9.
2. Малик, Л.К. Чрезвычайные ситуации, связанные с гидротехническим строительством (ретроспективный обзор) [Текст] / Л.К. Малик // Гидротехническое строительство. – 2009. – № 12. – С. 2 – 16.
3. Власюк, А.П. Математичне моделювання процесу корозії бетонного фундаменту гідротехнічної споруди [Текст] / А.П. Власюк, О.М. Степанченко // Вісник Хмельницького національного університету. Серія: технічні науки. Частина 1. – 2005. – Т. 2. – С. 46 – 52.
4. Власюк, А.П. Чисельне розв'язування однієї нелінійної задачі розчинення пласта солі [Текст] / А.П. Власюк, О.М. Степанченко // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2006. – Вип. 2. – С. 142 – 150.
5. Власюк, А.П. Чисельне розв'язання задачі розчинення і винесення пластових солей з основи гідротехнічних споруд [Текст] / А.П. Власюк // Доп. НАН України. – 1995. – № 8. – С. 37 – 39.
6. Степанченко, О.М. Чисельне моделювання розчинення пласта солі з врахуванням осмосу / О.М. Степанченко // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2005. – Вип. 3. – С. 363 – 371.
7. Степанченко, О.М. Математичне моделювання процесу вилуговування солей в основах гідротехнічних споруд та корозії їх фундаментів [Текст] / О.М. Степанченко // Вісн. національного університету водного господарства і природокористування. – 2007. – Вип. 4 (40). Частина 3. – С. 341 – 346.
8. Савула, Я.Г. Стабілізація чисельних розв'язків варіаційних задач міграції домішок: протипотокова схема [Текст] / Я.Г. Савула, О.Г. Шинкаренко // Вісник Львівського ун-ту. Серія: мех.-мат. – 1997. – С. 3 – 9.
9. Власюк, А.П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах [Текст] / А.П. Власюк, П.М. Мартинюк. – Рівне: Вид-во НУВГП, 2008. – 416 с.
10. Зенкевич, О. Конечные элементы и аппроксимация [Текст] / О. Зенкевич, К. Морган. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
11. Веригин, Н.Н. Основы теории растворения и вымыва солей при фильтрации воды в горных породах и грунтах [Текст] / Н.Н. Веригин // Инженерно-геологические свойства горных пород и методы их изучения. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – С. 59 – 70.
12. Веригин, Н.Н. Растворение и вынос солей в основаниях гидротехнических сооружений [Текст] / Н.Н. Веригин, Б.С. Шержуков // Труды координац. совещаний по гидротехнике. – Л.: ВНИИГ, 1970. – Вип. 48. – С. 263 – 277.

13. Веригин, Н.Н. Конвективная диффузия и массообмен при фильтрации растворов в пористой среде [Текст] / Н.Н. Веригин, В.С. Саркисян // Гидрогеол. исслед. водозаборн., водопонижительн. и дренажн. систем. – М.: 1980. – С. 19 – 24.

Отримано 01.06.2015