

УДК 517.958:534.1:539.3

І. Ластівка, докт. техн. наук

Національний авіаційний університет

МОДЕЛЮВАННЯ ТА РОЗРАХУНОК ПРОЦЕСУ ПОШИРЕННЯ ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ ЕЛЕКТРОПРУЖНИХ ХВИЛЬ У ТРИШАРОВІЙ ОБОЛОНЦІ

***Резюме.** Проведено математичне моделювання та розрахунок процесу поширення вісесиметричних електропружних хвиль у тришаровій неоднорідній по товщині циліндричній оболонці нескінченної довжини під дією механічного гармонічного навантаження за умови жорсткого з'єднання п'єзокерамічного і металевих шарів оболонки. У якості спрощуючих кінематичних припущень для подовжніх переміщень використано гіпотези С.П. Тимошенка. Проведено числовий розрахунок за наближеною теорією та порівняльний аналіз з аналогічними розрахунками за точною тривимірною теорією й побудовано відповідні дисперсійні криві.*

***Ключові слова:** тришарова циліндрична неоднорідна оболонка, механічне гармонічне навантаження, спрощуючі гіпотези, вісесиметричні електропружні хвилі, дисперсійні криві.*

I. Lastivka, D. of Engineering

MODELING AND CALCULATION OF THE PROCESS OF PROPAGATION OF AXISYMMETRICAL ELECTROELASTIC WAVES IN THREE-LAYER SHELL

***Summary.** The mathematical modeling and calculation of the process of distribution of axisymmetrical electroelastic waves in three-layer cylindrical non-uniform in width shell of infinite length under the mechanical harmonic stresses were conducted.*

The middle layer of shell is piezoceramic with radial polarization, the two outer are identical elastic isotropic metal layers, which are simultaneously electrodes that completely cover the surface of piezoceramic layer. Electrodes are shorted and electrified surfaces are free from mechanical stresses.

In terms of simplifying kinematical S.P. Tymoshenko hypotheses and in cases of rigid connection of layers the system of differential equations of motion and electrostatics was obtained and solved. The deduction of system of equations was conducted on the base of variadic principle of possible displacements using Reisner functional and in case of its stationarity.

Hypotheses of quadratic law of change of electric potential and linear law for the normal component of the vector of induction were taken for conjugate electric fields. The system of simplifying hypotheses for mechanical and electrostatic components of electroelastic field made possible to satisfy the mechanic uniform boundary conditions and conditions of rigid connection of non-uniform layers.

The numerical calculation of problem in approximate theory within described above assumptions was conducted. The results were compared with the computations by the precise three-dimensional theory and corresponding graphical dispersion relations were constructed. On the base of comparative analysis was made a conclusion about reasonably good coincidence of the results (within 3–5%) and possibility of application of given approximate theory with sufficient precision for practical purposes in the investigation of forced harmonic vibrations of composite piezoelectric systems of finite dimensions.

***Key words:** three-layer cylindrical non-uniform shell, mechanical harmonic stress, simplifying hypotheses, axisymmetrical electroelastic waves, dispersion relations.*

Вступ. Електромеханічні перетворювачі енергії різного функціонального призначення широко використовуються в науці й техніці. В останній час разом із традиційними п'єзоперетворювачами, які виконані у вигляді монолітних пластин або оболонок, використовуються конструкції, які можуть складатися з кількох п'єзоактивних і пасивних шарів. Пояснюється це тим, що використання багатошарових перетворювачів дає більше можливостей оптимізації системи шляхом зміни товщини, напрямку поляризації, схеми електричного з'єднання шарів тощо. Дослідження

зв'язаних полів у багатошарових конструкціях на основі тривимірних рівнянь електропружності пов'язано зі значними математичними труднощами. Тому для практичного використання розроблено і розробляються різні прикладні наближені теорії, спрямовані на математичне спрощення вирішення поставлених завдань, але водночас вони повинні давати достовірні результати.

Одним із найбільш розповсюджених підходів до побудови прикладних теорій є метод спрощуючих гіпотез. Суть його полягає у прийнятті фізично обґрунтованих спрощуючих гіпотез відносно характеру розподілу фізичних величин (напружень, деформацій, індукції тощо) уздовж якоїсь (як правило товщинної) координати. Використання у різних комбінаціях тих або інших спрощуючих гіпотез для механічних і електричних полів неоднорідних п'єзокерамічних оболонок призводить до значної кількості різноманітних схем і рівнянь. У більшості випадків [1,2,3] для механічних полів використовуються класичні гіпотези Кірхгофа-Лява. Але, як показали дослідження [4] для одношарової циліндричної оболонки, класичні гіпотези, які не враховують скінченність модуля зсуву, можуть призводити до суттєвої похибки при визначенні динамічних характеристик перетворювача.

У даній роботі, з метою врахування кінцевої величини модуля зсуву для матеріалу оболонки, приймаються кінематичні гіпотези С.П. Тимошенка. Для спряженого електричного поля приймаються гіпотези про квадратичний закон зміни електричного потенціалу і лінійний для нормальної складової вектора індукції.

Постановка задачі, граничні умови. У даній роботі розглянуто поширення вісесиметричних електропружних хвиль у неоднорідній по товщині циліндричній оболонці. Оболонка складається з трьох шарів: середній п'єзокерамічний з радіальною поляризацією, зовнішні – однакові пружні ізотропні шари, які є одночасно електродами, що повністю покривають поверхню п'єзокерамічного шару. Шари працюють спільно, без відриву і проковзування. Товщина середнього п'єзокерамічного шару h , товщина зовнішніх шарів h_1 , оболонка має загальну товщину $H = 2h_1 + h$ (рис.1) і віднесена до триортогональної системи координат $O_s\varphi z$ (s – параметр, що змінюється уздовж твірної, φ – кутова координата, вісь Oz направлена по нормалі до поверхні приведення $z = 0$, яка співпадає з серединною поверхнею радіуса R). Лицьові поверхні $z = \pm \frac{H}{2}$ вільні від механічних напружень, а електроди закорочені.

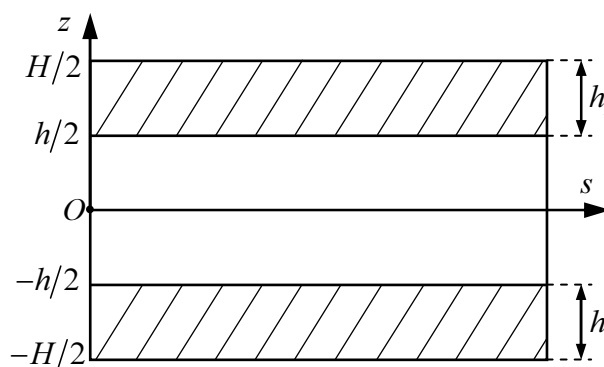


Рисунок 1. Тришарова неоднорідна по товщині п'єзокерамічна циліндрична оболонка

Figure 1. Three-layer piezoceramic cylindrical non-uniform in width shell

Граничні умови записуємо у вигляді

$$\sigma_{iz} = \left(s, \pm \frac{H}{2}, t \right); \quad \varphi \left(s, \pm \frac{h}{2}, t \right) = 0, \quad (i = s, z). \quad (1)$$

Умови жорсткого з'єднання шарів мають вигляд

$$\begin{aligned} u_i(s, z+0, t) &= u_i(s, z-0, t); \\ \sigma_{iz}(s, z+0, t) &= \sigma_{iz}(s, z-0, t), \quad \left(z = \pm \frac{h}{2} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

де u_i – механічні переміщення, σ_{iz} – напруження, φ – потенціал електричного поля.

Розв'язання задачі та аналіз результатів. У якості спрощуючих кінематичних припущень приймемо для поздовжніх переміщень u_s гіпотези С.П. Тимошенка, а поперечні переміщення u_z будемо вважати постійними по товщині оболонки, які не залежать від товщинної координати:

$$\begin{aligned} u_s(s, z, t) &= v(s, t) + z\gamma(s, t); \\ u_z(s, z, t) &= w(s, t), \end{aligned} \quad (3)$$

де $v(s, t)$ – переміщення серединної поверхні ($z=0$), $\gamma(s, t)$ – кут повороту нормалі до серединної поверхні. Тоді деформації запишемо у такому вигляді:

$$\varepsilon_{ss} = v_{,s} + z\gamma_{,s}; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{R}w; \quad \varepsilon_{sz} = w_{,s} + \gamma. \quad (4)$$

У співвідношеннях (4) і далі записи типу $v_{,s}$ або $w_{,s}$ означають диференціювання по відповідній координаті. Доповнимо кінематичні гіпотези (3) статичними гіпотезами для поперечних дотичних напружень

$$\sigma_{sz}(s, z, t) = f\left(\frac{z}{H}\right) \frac{1}{H} P(s, t). \quad (5)$$

Для потенціалу електричного поля закон зміни по товщині п'єзокерамічного шару задаємо у вигляді

$$\varphi(s, z, t) = f\left(\frac{z}{h}\right) \Phi(s, t). \quad (6)$$

Функцію $f(x)$, що входить у (5) і (6), вибираємо квадратичною у вигляді

$$f(x) = \frac{3}{2}(1 - 4x^2), \text{ яка автоматично задовольняє граничним умовам (1).}$$

Уведена таким чином система гіпотез (3), (5), (6) дозволяє задовольнити однорідним граничним умовам (1), а також умовам жорсткого з'єднання шарів (2). Функція $P(s, t)$, що входить до (5), не є незалежною, а пов'язана з переміщеннями w , γ та потенціалом Φ . Для встановлення цього зв'язку, виведення рівнянь руху й електростатики звернемося до умови стаціонарності функціоналу

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \delta(R^* - T) dt = 0, \quad (7)$$

де T – кінетична енергія, а R^* – функціонал типу Рейсснера вигляду [5]

$$R^*(u, \sigma, E) = \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + H^*(\sigma, E)) dV. \quad (8)$$

Тут V – об’єм, який займає оболонка, $H^*(\sigma, E)$ – ентальпія, що являє собою квадратичну функцію своїх аргументів [6]. Виконуючи варіювання в (7) з урахуванням (8) і прирівнюючи до нуля множники при $\delta\sigma_{ij}, \delta\Phi$, отримуємо такі співвідношення електропружності [7], два з яких виконуються точно, а три – інтегрально:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ss} &= s_{11}^E \sigma_{ss} + s_{12}^E \sigma_{\varphi\varphi} + d_{31} E_z; \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= s_{12}^E \sigma_{ss} + s_{11}^E \sigma_{\varphi\varphi} + d_{31} E_z; \\ \int_{-H/2}^{H/2} (\varepsilon_{sz} - (s_{44}^E \sigma_{sz} + d_{15} E_s)) \delta\sigma_{sz} dz &= 0; \\ \int_{-H/2}^{H/2} (D_s - (\varepsilon_{11}^T E_s + d_{15} \sigma_{sz})) \delta E_s dz &= 0; \\ \int_{-H/2}^{H/2} (D_z - (\varepsilon_{33}^T E_z + d_{31} (\sigma_{ss} + \sigma_{\varphi\varphi}))) \delta E_z dz &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Тут $s_{ij}^E, d_{ij}, \varepsilon_{ii}$ є кусково-сталими функціями від z : s_{ij}^E – пружні податливості; d_{ij} – п’єзомодулі; ε_{ii} – діелектричні проникливості.

Розв’язуючи (9) відносно u, γ, w і Φ з урахуванням (4), (5), (6), отримуємо

$$\begin{aligned} \sigma_{ss} &= B_{11} (u_{,s} + z\gamma_{,s}) + B_{12} \frac{1}{R} w + 12B_{13} \frac{1}{h^2} \Phi; \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= B_{12} (u_{,s} + z\gamma_{,s}) + B_{11} \frac{1}{R} w + 12B_{13} \frac{1}{h^2} \Phi; \\ \hat{D}_{s,s} &= \int_{-h/2}^{h/2} D_s f\left(\frac{z}{h}\right) dz = \frac{5}{6} \frac{abs_{55}^E}{Hh} (w_{,ss} + \gamma_{,s}) + \frac{1}{h} \left(-\frac{6}{5} \varepsilon_{11}^T h + \frac{5}{6} \frac{b^2}{H} s_{55}^E \right) \Phi_{,ss}; \\ \hat{D}_z &= \int_{-h/2}^{h/2} D_z f'\left(\frac{z}{h}\right) dz = \frac{12}{h} \left(\frac{2d_{31}}{s_{11}^E + s_{12}^E} - \varepsilon_{33}^T \right) \Phi - \frac{d_{31}h}{s_{11}^E + s_{12}^E} \gamma_{,s}; \\ \sigma_{sz} &= \left(\frac{5}{6} h \right) f\left(\frac{z}{H}\right) (a(w_{,s} + \gamma) + b\Phi_{,s}), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{де } a = \frac{2H^3 - 3H^2h + h}{2H^2 s_{55}^*} + \frac{h(3H^2 - h^2)}{2H^2 s_{55}^E}; \quad b = \frac{3}{2} \frac{hd_{15}}{s_{55}^E} \left(1 - \frac{h^2}{5H^2} \right);$$

$$B_{11} = \Delta s_{11}^E; \quad B_{12} = -\Delta s_{12}^E; \quad B_{13} = -\frac{d_{13}}{s_{11}^E + s_{12}^E}; \quad \frac{1}{\Delta} = (s_{11}^E)^2 - (s_{12}^E)^2.$$

Тут s_{55}^*, s_{55}^E відносяться відповідно до пружного і п’єзокерамічного шарів.

Введемо інтегральні характеристики:

$$\begin{aligned} T_s &= \int_{-H/2}^{H/2} \sigma_{ss} dz; & T_\varphi &= \int_{-H/2}^{H/2} \sigma_{\varphi\varphi} dz; \\ M_s &= \int_{-H/2}^{H/2} z \sigma_{ss} dz; & Q_{sz} &= \int_{-H/2}^{H/2} \sigma_{sz} dz. \end{aligned} \quad (11)$$

У результаті рівняння (7) для досліджуваного випадку гармонічних хвиль набуде вигляду

$$\begin{aligned} \iint_s \left[T_s (\delta v)_{,s} + M_s (\delta \gamma)_{,s} + \frac{1}{R} T_\varphi \delta w + Q_{sz} (\delta \gamma + (\delta w)_{,s}) + (\hat{D}_{s,s} - \hat{D}_z) \delta \Phi - \right. \\ \left. - \omega^2 \left((2\rho_1 h_1 + \rho h) (v \delta v + w \delta w) + \frac{1}{12} (\rho_1 (H^3 - h^3) + \rho h^3) \gamma \delta \gamma \right) \right] ds = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

де ρ_1 і ρ – густини пружних ізотропних шарів (електродів) і п'єзокерамічного шару відповідно. Прирівнюючи до нуля множники при незалежних варіаціях δv , $\delta \gamma$, δw і $\delta \Phi$, отримаємо рівняння руху і електростатики у такому вигляді:

$$\begin{aligned} T_{s,s} + \omega^2 v (2\rho_1 h_1 + \rho h) &= 0; \\ M_{s,s} - Q_{sz} + \frac{\omega^2 \gamma}{12} (\rho_1 (H^3 - h^3) + \rho h^3) &= 0; \\ \frac{1}{R} T_\varphi - Q_{sz,s} + \omega^2 w (2\rho_1 h_1 + \rho h) &= 0; \quad \hat{D}_{s,s} - \hat{D}_z = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Розв'язок системи (13) у вигляді гармонічних хвиль, що поширюються уздовж координати s , призводить до дисперсійного співвідношення, яке зв'язує частоту ω і хвильове число k .

На рис.2 наведено дисперсійні криві, розраховані при різних значеннях параметра $d = h/H$ і відносній товщині $\varepsilon = \frac{2h_1}{h} = 0,05$ тришарової оболонки, електроди якої виготовлені зі срібла з наступними його константами:

$$\rho = 10,5 \text{ кг/м}^3; \quad E = 8,27 \times 10^{10} \text{ Н/м}^2; \quad \nu = 0,38,$$

де E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона.

У якості матеріалу середнього п'єзокерамічного шару оболонки використовували п'єзокераміку PZT-4 з такими характеристиками:

$$\begin{aligned} s_{11}^E &= 0,123 \lambda^{-1}; & s_{12}^E &= 0,0405 \lambda^{-1}; & s_{44}^E &= 0,39 \lambda^{-1}; \\ \lambda &= 10^{10} \text{ Н/м}^2; & d_{13} &= -123 \times 10^{-12} \text{ Кл/Н}; & d_{15} &= 496 \times 10^{-12} \text{ Кл/Н}; \\ \varepsilon_{11}^T &= 1475 \varepsilon_0; & \varepsilon_{33}^T &= 1300 \varepsilon_0; & \rho &= 7,3 \times 10^3 \text{ кг/м}^3, \end{aligned}$$

де λ – параметр з розмірністю пружних сталей; ε_0 – абсолютна діелектрична проникність вакууму.

У граничних випадках при $d=1$ і $d=0$ отримуємо відповідно одношарову п'єзокерамічну оболонку і двошарову оболонку, що складається із зовнішніх ізотропних шарів. Але така двошарова оболонка еквівалентна одношаровій ізотропній оболонці, оскільки припускається, що зовнішні шари однакові й деформуються без відриву і проковзування. Відношення загальної товщини оболонки до радіуса серединної поверхні H/R залишається при зміні d постійним і дорівнює 0,5. Частота $\tilde{\omega}$ і хвильове число \tilde{k} безрозмірені таким чином:

$$\tilde{\omega}^2 = \frac{\omega^2 \rho H^2}{\lambda}; \quad \tilde{k} = \frac{kH}{\pi}, \quad (\lambda = 10^{10} \text{ Па}).$$

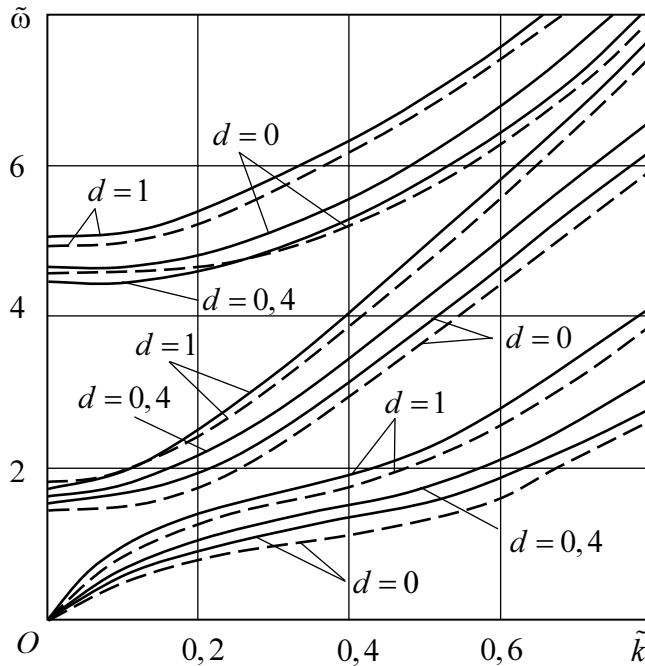


Рисунок 2. Дисперсійні криві, розраховані за наближеною (суцільні лінії) і тривимірною (пунктирні лінії) теоріями

Figure 2. Dispersion relations constructed by the approximate theory (solid line) and three-dimensional theory (dashed line)

Для визначення точності запропонованої теорії на рис.2 наведено три дисперсійні гілки, розраховані за даною (суцільні лінії) і тривимірною (пунктиром) теоріями [8] для частинних випадків $d=0$ (суцільна металева оболонка) і $d=1$ (суцільна п'єзокерамічна), а також для випадку складеної тришарової оболонки з параметром $d=0,4$ (суцільні лінії).

Як бачимо з рис.2, перша і друга (знизу) дисперсійні криві для тришарової оболонки розміщені в області, обмеженій відповідними кривими одношарових пружної і п'єзокерамічної оболонок. Отримані результати за наближеною та уточненою теоріями характеризуються задовільним співпаданням (відхилення до 5%).

Висновки. Порівняльний аналіз дисперсійних графічних залежностей (рис.2), побудованих на основі розрахунків за наближеною теорією з використанням кінематичних гіпотез С.П. Тимошенка і за допомогою точної тривимірної теорії [8], вказує на досить добре співпадання результатів – у межах 3–5%.

Результати даних досліджень з достатньою для практичних цілей точністю можуть бути використані при розв'язуванні задач про вимушені гармонічні коливання складених п'єзоелектричних систем скінченних розмірів.

Conclusions. Comparative analysis of the dispersion graphical relations (fig.2), based on calculations by the approximate theory using kinematical S.P. Timoshenko hypotheses and using the precise three-dimensional theory [8], testifies reasonably good coincidence of the results (within 3–5%).

The results of this study with sufficient precision for practical purposes can be used in solving problems of forced harmonic vibrations of composite piezoelectric systems of finite dimensions.

Список використаної літератури

1. Карнаухов, В.Г. Термомеханическая теория слоистых вязкоупругих оболочек с пьезоэффектом, поляризованных вдоль одной координатной линии [Текст] / В.Г. Карнаухов, И.Ф. Киричек // Прикл. механика. – 1986. – Т.22, №11. – С.71–78.
2. Карнаухов, В.Г. Геометрически нелинейная теория вязкоупругих многослойных пьезокерамических пластин и оболочек [Текст] / В.Г. Карнаухов, И.Ф. Киричек // Прикл. механика. – 1983. – Т.19, №10. – С.71–77.
3. Adelman, N.T. Flexural extensional behavior of composite piezoelectric circular plates [Text] / N.T. Adelman, V. Stavsky. – J. Acoust. Soc. Amer. – 1980. – V.57, №3. – P.819–822.
4. Drumheller, D.S. Dynamic shell theory for ferroelectric ceramic [Text] / D.S. Drumheller // J. Acoust. Soc. Amer. – 1970. – 55. – P.339–344.
5. Reissner, E. On variational theorem in elasticity [Text] / E. Reissner // Journal math. and phys. – 1950. – V.47. – P.1343–1353.
6. Сиротин, Ю.И. Основы кристаллофизики [Текст] / Ю.И. Сиротин, М.П. Шаскольская. – М.: Наука, 1982. – 680 с.
7. Физическая акустика [Текст]; под ред. У. Мэзона. – М.: Мир, 1966. – Т.1, Ч.А. – 592 с.
8. Шульга, Н.А. Осесимметричные упругие волны в полем пьезокерамическом цилиндре [Текст] / Н.А. Шульга, А.Я. Григоренко, И.А. Лоза // Прикл. механика. – 1984. – Т.20, №1. – С.26–32.

Отримано 01.08.2014