

УДК 539.3

В. Ревенко, канд. фіз.-мат. наук

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

ВИЗНАЧЕННЯ РОЗПОДІЛУ НАПРУЖЕНЬ У ДВОХ З'ЄДНАНИХ МІЖ СОБОЮ ПРЯМОКУТНИХ ПЛАСТИНАХ

Резюме. Запропоновано новий аналітико-числовий метод (скінченних тіл) розв'язку плоскої задачі теорії пружності для неопуклої багатокутної пластини у вигляді з'єднаних між собою двох прямокутних пластин. Уявний поділ багатокутної пластини на прямокутні пластини дозволив явно врахувати основний напружений стан, який відповідає головним векторам сил і моментів, що діють на окремих сторонах пластин. Використано точні розв'язки бігармонічного рівняння і функцію напружень подано у вигляді ряду за неортогональними функціями. Задоволення крайових умов і умов ідеального спряження отриманих прямокутних пластин зведено до пошуку мінімуму узагальненої квадратичної форми. Теоретично встановлено числовий критерій збіжності методу. Показано, що точність задоволення крайових умов і умов ідеального спряження оцінюється одним числом – мінімумом квадратичної форми.

Ключові слова: квадратична форма, багатокутна пластинка, основний напружений стан.

V. Revenko

DETERMINATION OF STRESS DISTRIBUTION IN TWO INTERCONNECTED RECTANGULAR PLATES

Summary. The paper is devoted to presentation of the stress-strain state (SSS) of structurally inhomogeneous bearing structures in the form of interconnected rectangular plates. These bearing elements are widely used in construction and engineering designs. Determination of the stress state is an important scientific and practical problem. To find the SSS rectangular plates various analytical and numerical approaches have been developed. However, publications that describe a technique for solving boundary value problems for nonconvex polygon are not available. Convergence of the solution boundary-value problem for nonconvex polygonal plates by the method of Fourier series have been investigated. By the numerical calculations it was found that the computational process satisfy all boundary conditions with increasing members of the sum of Fourier series loses stability. However, the method of Fourier series gives a stable solution of the boundary value problem for a rectangular plate. The polygonal plate division on simple rectangular parts is offered.

New analytical-numerical method (finite bodies) of solution of the plane problem for two interconnected rectangular plates is developed. Polygonal plate is divided rectangular plates conventionally. On the lines of division perfect contact conditions are taken into account, which provide equality of stresses, strains and displacements. Stressed state of each plate is presented as the sum of two components: the basic stress state, self-equilibrated stress state (as a series). General expression of the stress function of the basic stress state, which corresponds to the principal vector of forces and moments acting on separate sides of the plate has been built. Exact solutions of biharmonic equation are used and function self-equilibrated stress state is presented in a series of nonorthogonal functions. Components of displacement vector and the stress tensor are presented as series according to the constructed nonorthogonal functions. Determination of the coefficients row is based on the proposed method of satisfying all conditions of ideal contact and boundary conditions. For the first time the numerical convergence criterion method was established theoretically. It is shown that the accuracy of satisfaction of the boundary conditions and the conditions of perfect contact is measured by a single number – the minimum quadratic form.

Key words: quadratic form, polygonal plate, basic stress state.

Вступ. У будівельних конструкціях, машинобудуванні та інших галузях народного господарства використовують елементи конструкцій у вигляді з'єднаних між собою пластин, які знаходяться під дією різноманітних навантажень. Руйнування таких елементів, як правило, починається із зони їх з'єднання, тому розв'язання відповідних

крайових задач і дослідження їх напруженого стану – важлива наукова і практична проблема [1–4]. При дослідженні напружено-деформованого стану (НДС) таких елементів конструкцій потрібно визначати напружений стан окремих прямокутних пластин [1, 3–6]. Для знаходження НДС прямокутних пластин використовують різноманітні аналітичні й числові підходи [1–9], огляд літератури наведено в [4,9]. Однак практично відсутні публікації, які описують аналітичну методику розв’язування крайових задач для неопуклих багатокутних пластин, що мають внутрішні кутові точки. У праці [10] для опуклої багатокутної пластини використано подання крайових умов [3], а знаходження невідомих коефіцієнтів ряду зведено до мінімізації узагальненої квадратичної форми.

Метою роботи є розроблення нового методу розв’язування плоскої задачі теорії пружності для неопуклої багатокутної пластини та встановлення умов його збіжності.

Постановка задачі і подання розв’язку. Для простоти викладу запропонованого методу, розглянемо плоску задачу теорії пружності для багатокутної пластини Π товщиною h , яка складається з двох прямокутних пластин $S_j = \{(x, y) \in ([0, (-1)^j a_j] \times [-b_j, b_j])\}$, які на сторонах $x = -a_1$, $x = a_2$ навантажені однорідними зусиллями σ_0^j , де $b_1 \sigma_0^1 = b_2 \sigma_0^2$ (див. рис.1).

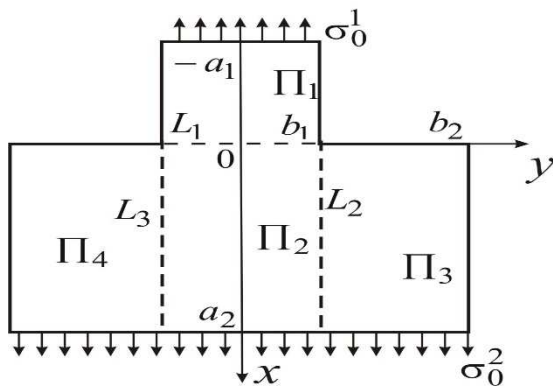


Рисунок 1. Навантаження неопуклої пластини

Figure 1. Load of nonconvex plate

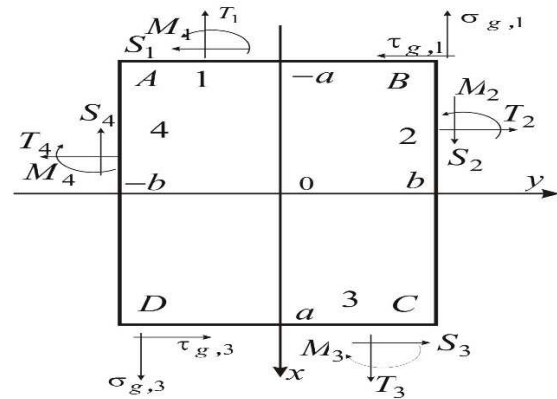


Рисунок 2. Напрямок сил і моментів

Figure 2. Direction of forces and moments

Плоский напружений стан пластини Π описується [2,3] функцією напружень $\Phi(x, y)$, яка задовольняє бігармонічному рівнянню

$$\Delta\Delta\Phi(x, y) = \frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4} = 0 \quad (1)$$

і через яку виражаються компоненти тензора напружень

$$\sigma_{11} = \sigma_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{12} = \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}, \quad \sigma_{22} = \sigma_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Внаслідок симетрії пластини і її навантаження, досить розглянути крайові умови на половині границі пластини Π від точки $(-a_1, 0)$ до точки $(a_2, 0)$, яку

позначимо Γ . На контурі Γ задані крайові умови для нормальних та дотичних навантажень

$$\sigma_n(x, y)|_{\Gamma} = \sigma_g|_{\Gamma}, \quad \sigma_{12}(x, y)|_{\Gamma} = 0, \quad (3)$$

де σ_g – відомі навантаження.

Напружений стан пластини Π будемо шукати методом скінченних тіл [11]. Для цього уявно розділимо її по лініях L_j , $j = \overline{1,3}$ на чотири окремі прямокутні пластини Π_j , $j = \overline{1,4}$ (рис.1). Умови суцільності матеріалу пластини Π при переході через уявні розрізи L_j замінимо умовами ідеального спряження всіх компонент НДС окремих пластин Π_j . Внаслідок симетрії пластини Π і її навантаження напружений стан пластин Π_3 і Π_4 буде однаковий. Отже, достатньо розглянути умови спряження тільки на розрізах L_j , $j = \overline{1,2}$, оскільки напружені стани вздовж ліній L_2 і L_3 будуть однаковими.

Згідно з працями [7,8] подання НДС кожної окремої прямокутної пластини розділимо на дві складові: основного напруженого стану, який відповідає головним векторам сил і моментів заданого навантаження (рис.2) і самозрівноваженого стану (у вигляді ряду), компоненти якого мають нульові головні вектори сил і моментів.

Функція напружень основного напруженого стану для прямокутної пластини, серединна поверхня якої займає прямокутну область $\Pi_0 = \{(x, y) \in ([-a, a] \times [-b, b])\}$ (рис.2) має вигляд

$$\begin{aligned} \Phi_0(x, y) = & \frac{T_4}{4ha} x^2 - \frac{M}{4hab} xy + \frac{T_1}{4hb} y^2 + \frac{M_4}{4ha^3} x^3 + \frac{M_1}{4hb^3} y^3 + \\ & + \frac{M_3 - M_1}{8hab^3} \Phi^5 + \frac{M_2 - M_4}{8ha^3b} \Phi^6 + \frac{T_3 - T_1}{8hab} y^2(x+a) + \frac{T_2 - T_4}{8hab} x^2(y+b), \end{aligned} \quad (4)$$

де $M = a(S_1 + S_3) - M_3 + M_1$, $\Phi^5(x, y) = y^3(x+a) - 3b^2xy$, $\Phi^6(x, y) = x^3(y+b) - 3a^2xy$.

Підставимо функцію (4) у співвідношення (2) і знайдемо напруження:

$$\sigma_y^0 = \frac{T_4}{2ha} + \frac{3M_4}{2ha^3} x + \frac{M_2 - M_4}{4ha^3b} 3x(y+b) + \frac{T_2 - T_4}{4hab} (y+b),$$

$$\sigma_x^0 = \frac{T_1}{2hb} + \frac{3M_1}{2hb^3}y + \frac{T_3 - T_1}{4hab}(x+a) + \frac{M_3 - M_1}{4hb^3a}3y(x+a), \quad (5)$$

$$\tau_{xy}^0 = \frac{M}{4hab} + \frac{M_3 - M_1}{8hb^3a}3(b^2 - y^2) + \frac{M_2 - M_4}{8ha^3b}3(a^2 - x^2) - \frac{T_3 - T_1}{4hab}y - \frac{T_2 - T_4}{4hba}x.$$

Перевірено, що напруження (5) задовольняють рівняння рівноваги пластини і створюють нормальні T_j , дотичні S_j сили та моменти M_j , $j = \overline{1,4}$ (рис.2).

Основний напружений стан пластини Π_1 – однорідний розтяг у напрямку осі Ox : $T_3^1 = 2hb_1\sigma_0^1$, $\Phi_0^1(x,y) = \frac{\sigma_0^1}{2}y^2$, $\sigma_{11}^{0,1} = \sigma_0^1$. Із умов рівноваги окремих пластин Π_j , $j = \overline{2,3}$ знайдемо головні компоненти вектора сил і моментів, які діють на стороні L_2 пластини Π_2

$$T_2^2 = 0, \quad S_2^2 = h\sigma_0^2(b_2 - b_1), \quad M_2^2 = -0,5h\sigma_0^2(b_2 - b_1)^2. \quad (6)$$

Функції напружень основного напруженого стану пластин Π_m , $m = \overline{2,3}$ згідно з умовами (6) і виразом (4) мають вигляд

$$\begin{aligned} \Phi_0^2(x,y) &= \frac{T_1^2}{4hb_1}y^2 + 2\frac{M_2^2}{ha_2^3}(x - \frac{a_2}{2})^3 + \frac{T_3^2 - T_1^2}{4ha_2b_1}xy^2, \\ \Phi_0^3(x,y) &= 2\frac{M_4^3}{ha_2^3}(x - \frac{a_2}{2})^3 + \frac{T_3^3}{2ha_2b_3}x(y - \frac{b_3}{2} - b_1)^2 - \\ &- 2\frac{M_4^3}{hb_3a_2^3}(x - \frac{a_2}{2})[(y - b_1)(x - \frac{a_2}{2})^2 - \frac{3}{4}a_2^2(y - \frac{b_3}{2} - b_1)], \end{aligned} \quad (7)$$

де $T_1^2 = 2hb_1\sigma_0^1$, $T_3^2 = 2hb_1\sigma_0^2$, $M_4^3 = M_2^2$, $T_3^3 = S_2^2$, $b_3 = b_2 - b_1$, верхній індекс – номер пластини. Напрямок сил і моментів показано на рис.2. Компоненти напружень основного НДС виразимо через функцію напружень (7) за формулами (2), або (5) і після перетворень отримаємо

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{0,2} &= \sigma_0^1 + \frac{\sigma_0^2 - \sigma_0^1}{a_2}x, \quad \sigma_{22}^{0,2} = -6\frac{b_3^2}{a_2^3}\sigma_0^2(x - \frac{a_2}{2}), \quad \sigma_{12}^{0,2} = \frac{\sigma_0^1 - \sigma_0^2}{a_2}y, \\ \sigma_{11}^{0,3} &= \frac{\sigma_0^2}{a_2}x, \quad \sigma_{22}^{0,3} = 6\frac{b_3}{a_2^3}\sigma_0^2(x - \frac{a_2}{2})[y - b_2], \\ \sigma_{12}^{0,3} &= -\frac{\sigma_0^2}{a_2}(y - \frac{b_2 + b_1}{2}) - 3\frac{b_3}{a_2^3}\sigma_0^2x(x - a_2). \end{aligned} \quad (8)$$

Самозрівноважений напружений стан будемо визначати за допомогою методу рядів Фур'є у вигляді набору функцій $\phi_k^m(\mu_k, \alpha_m, \gamma)$, розв'язків рівняння (1), які

залежать від зліченного набору спектральних параметрів $\mu_k = k\pi d_1$ і згасають при віддаленні від базової сторони прямокутної пластини. Загальний вираз функцій напружень для кожної окремої пластини Π_m , $m = \overline{1, 3}$ запишемо як суму розглянутих складових:

$$\Phi_N^m(x, y) = \Phi_0^m(x, y) + \sum_{k=1}^{8N} a_k^m \varphi_k^m(\mu_k, \alpha_m, \gamma), \quad m = \overline{1, 3}, \quad (9)$$

де a_k^m – невідомі коефіцієнти, N – довільне натуральне число,

$$\varphi_{k+jN-N}^m(\mu_k, \alpha_m, \gamma) = f_j(\mu_k, \gamma) e^{-v_m \mu_k \alpha_m}, \quad \varphi_{k+(j+1)N}^m(\mu_k, \alpha_m, \gamma) = f_j(\mu_k, \gamma) e^{v_m \mu_k (\alpha_m - 1)},$$

$$\varphi_{k+(j+3)N}^m(\mu_k, \alpha_m, \gamma) = f_j(\mu_k, \alpha_m) ch(n_m \mu_k \gamma) / ch(n_m \mu_k),$$

$$\varphi_{k+(j+5)N}^m(\mu_k, \alpha_m, \gamma) = q_j(\mu_k, \alpha_m) ch(n_m \mu_k \gamma) / ch(n_m \mu_k), \quad j = \overline{1, 2}, \quad k = \overline{1, N};$$

$$f_1(\mu_k, \gamma) = \gamma \sin(\mu_k \gamma), \quad f_2(\mu_k, \gamma) = \cos(\mu_k \gamma), \quad q_1(\mu_k, \alpha) = \alpha \cos(\mu_k \alpha),$$

$$q_2(\mu_k, \alpha) = \sin(\mu_k \alpha); \quad v_m = \frac{a_m}{b_m}, \quad a_3 = a_2, \quad n_m = \frac{1}{v_m}, \quad m = \overline{1, 2}; \quad \gamma = y/b_2, \quad \gamma \in [-1, 1];$$

$$\alpha_1 = -\frac{x}{a_1}, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{x}{a_2}, \quad \alpha_m \in [0, 1] \text{ – безрозмірні змінні; } a_1 < 0, 4.$$

Підставимо в співвідношення (2) функції напружень (9), вирази (8) та визначимо компоненти тензора напружень за такими формулами:

$$\sigma_{11}^m = \sigma_{11}^{0,m} + \frac{1}{b_2^2} \sum_{k=1}^{8N} a_k^m \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} \varphi_k^m(\mu_k, \alpha_m, \gamma),$$

$$\sigma_{22}^m = \sigma_{22}^{0,m} + \sum_{k=1}^{8N} a_k^m \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi_k^m(\mu_k, \alpha_m, \gamma), \quad (10)$$

$$\sigma_{12}^m = \sigma_{12}^{0,m} - \frac{1}{b_2} \sum_{k=1}^{8N} a_k^m \frac{\partial^2}{\partial x \partial \gamma} \varphi_k^m(\mu_k, \alpha_m, \gamma).$$

На уявних розрізах L_j , $j = \overline{1, 2}$ виконуються умови ідеального контакту, які полягають у неперервності переміщень і напружень:

$$u_x^{j+1} = u_x^j, \quad u_y^{j+1} = u_y^j, \quad \sigma_n^{j+1} = \sigma_n^j, \quad \sigma_{12}^{j+1} = \sigma_{12}^j, \quad j = \overline{1, 2}. \quad (11)$$

Оскільки матеріал пластин однаковий, то умови (11) відповідно можна спростити:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} [\Phi_N^1(x, y) - \Phi_N^2(x, y)] = 0, \quad x = 0, \quad n = \overline{0, 3}, \quad y \in [0, b_1]; \quad (12)$$

$$\frac{\partial^n}{\partial y^n} [\Phi_N^2(x, y) - \Phi_N^3(x, y)] = 0, \quad y = b_1, \quad n = \overline{0, 3}, \quad x \in [0, a_2]. \quad (13)$$

Умови (12), (13) забезпечують неперервність функції напружень, заданої в багатокутній пластині Π , і всіх її похідних при переході через лінії уявних розрізів L_j , $j = \overline{1, 2}$. До залежностей (12), (13) потрібно додати крайові умови (3).

Підставимо компоненти тензора напружень (10) в умови (3), (12), (13) та після математичних перетворень отримаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M c_k A_{n,k}(\gamma) &= P_n, \quad n = \overline{1, 6}, \quad \gamma \in [0, \zeta_1], \\ \sum_{k=1}^M c_k A_{n,k}(\gamma) &= P_n, \quad n = \overline{7, 8}, \quad \gamma \in [\zeta_1, 1], \\ \sum_{k=1}^M c_k A_{n,k}(\gamma) &= P_n, \quad n = \overline{9, 10}, \quad \gamma \in [0, 1], \\ \sum_{k=1}^M c_k A_{n,k}(\alpha) &= P_n, \quad n = \overline{11, 18}, \quad \alpha \in [0, 1], \end{aligned} \quad (14)$$

де $M = 24N$; $c_{k+8(m-1)N} = a_k^m$, $m = \overline{1, 3}$, $k = \overline{1, 8N}$; $\zeta_1 = b_1/b_2$; $P_1 = \sigma_0^1$; $P_9 = \sigma_0^2$, а всі інші коефіцієнти P_n дорівнюють нулеві.

Систему рівнянь (14) подамо в компактному вигляді

$$\sum_{k=1}^M c_k A_{m,k}(\gamma_m) = P_m, \quad m = \overline{1, 18}, \quad \gamma_m \in [\beta_m, \alpha_m], \quad (15)$$

де $\beta_m = 0$, $\alpha_m = \zeta_1$, $m = \overline{1, 6}$; $\beta_m = \zeta_1$, $\alpha_m = 1$, $m = \overline{7, 8}$; $\beta_m = 0$, $\alpha_m = 1$, $m = \overline{9, 18}$.

Зведення проблеми розв'язування системи рівнянь (15) до пошуку мінімуму узагальненої квадратичної форми. Виражені через функції Φ_N^n напруження (10) і переміщення точно задовольняють співвідношення плоскої задачі теорії пружності. Для оцінювання похибки наближеного розв'язку скінченної системи рівнянь (15), яка описує крайові умови на контурі пластини й умови контакту на уявних розрізах, запишемо нев'язки

$$|f_{m,N}(\gamma_m) - P_m|, \quad m = \overline{1, 18}, \quad \gamma_m \in [\beta_m, \alpha_m], \quad (16)$$

де $f_{m,N}(\gamma) = \sum_{k=1}^M c_k A_{m,k}(\gamma)$. У роботі [12] розроблено аналітико-числовий метод,

використання якого дозволяє одночасно мінімізувати довільну кількість рівнянь вигляду (15) і умов (16), заданих на різних поверхнях тіла. Використаємо його і зведемо

задоволення системи 18-ти рівнянь (15) до пошуку мінімуму такої узагальненої квадратичної форми

$$\Omega_N \{c_1, \dots, c_M\} = \sum_{m=1}^{18} \|f_{m,N}(\gamma) - P_m\|_m^2 = \sum_{k,j=1}^M c_k c_j W_{kj} - 2 \sum_{k=1}^M c_k V_k + P^2, \quad (17)$$

де норму в $L_2[\beta_m, \alpha_m]$ позначатимемо $\|f(\gamma)\|_m = \sqrt{\int_{\beta_m}^{\alpha_m} f^2(\gamma) d\gamma}$;

$$W_{kj} = \int_{\beta_m}^{\alpha_m} \sum_{m=1}^{18} A_{m,k}(\gamma) A_{m,j}(\gamma) d\gamma, \quad W_{kj} = W_{jk};$$

$$V_k = \int_{\beta_m}^{\alpha_m} \sum_{m=1}^{18} A_{m,k}(\alpha) P_m(\alpha) d\alpha, \quad k, j = \overline{1, M}; \quad P^2 = \frac{b_1}{b_2} (\sigma_0^1)^2 + (\sigma_0^1)^2.$$

У роботах [7,8] запропоновано методика аналітичного обчислення інтегралів W_{kj} , V_k , які визначають коефіцієнти узагальненої квадратичної форми, що дозволяє знайти значення невідомих змінних c_k з високою точністю й підвищити швидкодію методу.

За своїм означенням узагальнена квадратична форма (17) є невід'ємна. Її мінімум позначимо $F(N)$, а змінні, на яких він досягається – c_k^N . Із умови мінімуму квадратичної форми отримаємо систему лінійних рівнянь

$$\sum_{k=1}^M c_k^N W_{kj} = V_j, \quad j = \overline{1, M}. \quad (18)$$

Із рівнянь (18) обчислимо змінні c_k^N , $k = \overline{1, M}$, а потім визначимо коефіцієнти a_k^m і знайдемо шукані функції напружень Φ_N^n .

Встановлення числових критеріїв збіжності розв'язку. Покажемо, що для побудованих функцій напружень Φ_N^m і знайденого мінімуму $F(N)$ квадратичної форми (17) вірні такі твердження:

Лема. Функція $F(N)$ є невід'ємна і не зростає.

Доведення леми подібне, як у [8].

Відзначимо, що квадратична форма (17) вибрана таким чином, що для її мінімуму $F(N)$ і знайдених функцій напружень $\Phi_N^n(x, y)$ буде виконуватися рівність

$$F(N) = \sum_{m=1}^{18} \int_{\beta_m}^{\alpha_m} [f_{m,N}(\gamma) - P_m]^2 d\gamma$$

або нерівність $F(N) \geq \|f_{m,N}(\gamma) - P_m\|_m^2. \quad (19)$

Теорема. Якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке N , що $F(N) < \frac{\varepsilon^2}{4}$, то існують межі послідовностей

$$\Phi^m = \lim_{N \rightarrow \infty} \Phi_N^m, \quad m = \overline{1, 3},$$

а знайдені переміщення та напруження точно задовольняють умови (15), а, отже, і (3), (11) у метриці $L_2[\beta_m, \alpha_m]$ і визначають розв'язок плоскої задачі.

Доведення. Розглянемо послідовність малих додатних чисел ε_N , яка збігається до нуля. Згідно з умовою теореми ця послідовність існує і їй відповідає послідовність натуральних чисел $N \rightarrow \infty$. Відповідно з лемою і умовою теореми для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке N , що $\varepsilon_N < \varepsilon$ і виконується

$$F(N+k) \leq F(N) < \frac{\varepsilon_N^2}{4} < \frac{\varepsilon^2}{4}$$

для будь-якого натурального k . Отже, якщо спрямувати $\varepsilon \rightarrow 0$, то в границі оримаємо

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F(N) = 0.$$

Покажемо, що при зменшенні ε_N , $\varepsilon \geq \varepsilon_N \geq 0$ і відповідно збільшенні N , переміщення і напруження побудовані з використанням коефіцієнтів c_k^N і функцій (9) задовольнятимуть умови (15) з заданою похибкою ε у метриці простору L_2 . Дійсно, з умови (19) і нерівності трикутника випливає, що послідовності функцій $f_{m,N}(\gamma)$ є фундаментальними, оскільки

$$\|f_{m,j} - f_{m,k}\|_m \leq \|f_{m,j} - P_m\|_m + \|f_{m,k} - P_m\|_m \leq 2\sqrt{F(N)} < \varepsilon_N < \varepsilon, \quad m = \overline{1, 18}$$

для будь-яких $k, j \geq N$. Отже, існують границі функцій $f_{m,N}(\gamma)$, які позначимо

$$f_m(\gamma) = \lim_{N \rightarrow \infty} f_{m,N}(\gamma), \quad m = \overline{1, 18}.$$

Умови (15) також задовольняються із заданою похибкою $\varepsilon_N > 0$ у метриці L_2 , оскільки згідно з (19) отримаємо такі оцінки:

$$\|f_{m,N} - P_m\|_m \leq \sqrt{F(N)} < \varepsilon_N/2, \quad m = \overline{1, 18}. \quad (20)$$

Спрямуємо в нерівностях (20) $\varepsilon_N \rightarrow 0$, і в границі отримаємо, що функції $f_m(\gamma)$ точно задовольняють умови (15) у метриці простору L_2 . Отже, маємо

$$\|f_m - P_m\|_m = 0, \quad m = \overline{1, 18}. \quad (21)$$

Ми показали, що у випадку виконання умов теореми, напруження, які визначаються функціями

$$\Phi_j = \lim_{N \rightarrow \infty} \Phi_j^N, \quad j = \overline{1,3}$$

точно задовольняють усі рівняння і співвідношення плоскої задачі, а із умов (21) випливає, що вони задовольняють умови (15) у метриці $L_2[\beta_m, \alpha_m]$. Оскільки умови (15) еквівалентні умовам (3), (11), то функції Φ_j визначають шуканий розв'язок плоскої задачі. Кінець доведення.

Із доведення теореми і нерівності (19) випливає, що точність задоволення крайових умов оцінюється одним числом – мінімумом квадратичної форми $F(N)$.

Числовий розв'язок. Виберемо значення N . Чисельно визначимо відношення $F(N)/P^2$. Якщо воно буде менше 10^{-3} , то розв'язок знайдено з відносною похибкою, достатньою для технічних розрахунків. Якщо ж відношення буде більше, то збільшуємо кількість членів ряду N і повторно проводимо обчислення. Далі за знайденими функціями напружень визначаємо НДС пластини.

Висновки. Встановлено: обчислювальний процес точного задоволення, методом рядів Фур'є, крайових умов у неопуклій багатокутній пластині зі збільшенням кількості членів суми ряду втрачає стійкість і точність; без уявного розрізання на простіші пластини не вдається коректно визначити її основний напружений стан. Для розв'язування таких крайових задач обґрунтовано новий аналітико-числовий метод (скінченних тіл). Для знаходження напруженого стану неопуклу пластину розрізано на чотири прямокутні пластини. Запропоновано методику подання розв'язку окремої прямокутної пластини на дві частини, а саме: основного напруженого стану, який визначається головними векторами сил і моментів; самозрівноваженого стану (у вигляді ряду за базовими функціями). Розроблено методику апроксимації умов ідеального контакту прилеглих пластин і крайових умов скінченною кількістю базових неортогональних функцій. Дослідження розв'язку отриманих систем рівнянь зведено до знаходження мінімуму узагальненої квадратичної форми. Встановлено, що знайдені числові значення мінімуму узагальненої квадратичної форми визначають збіжність розв'язку і дають оцінку похибки задоволення всіх крайових умов і умов ідеального контакту.

Conclusions. It was established that the accuracy of computational process satisfaction of boundary conditions in nonconvex polygonal plate by known method of Fourier series with increase the number of members of the sum of row loses its stability and accuracy. New analytical-numerical method (finite bodies) for calculating of the stress-strain state of nonconvex polygonal plate is grounded. To determine the basic stress state of the plate it is cut into four rectangular plates. The method of presentation solution single rectangular plate in two parts is proposed, that is the basic stress state, which is defined by the main vectors of forces and moments and self-equilibrated stress state (in the form of a series on nonorthogonal functions). The method of approximating of the perfect contact conditions of adjacent plates and boundary conditions by a finite number of nonorthogonal functions is developed. Investigation of the system of equations solutions is reduced to finding the minimum of the quadratic forms. It was established that the numerical value of the minimum quadratic form determines the convergence solution and gives the error estimation satisfying of the boundary conditions and the conditions of perfect contact.

Список використаної літератури

1. Гринченко, В.Т. Пространственные задачи теории упругости и пластичности [Текст] / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко // Равновесие упругих тел канонической формы. – К.: Наук. думка, 1985. – Т.3. – 280 с.
2. Мусхелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости [Текст] / Н.И. Мусхелишвили. – Москва: Наука, 1966. – 707 с.
3. Тимошенко, С.П. Теория упругости [Текст] / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
4. Шалдырван, В.А. Некоторые результаты и проблемы трехмерной теории пластин (обзор) [Текст] / В.А. Шалдырван // Прикл. механика. – 2007. – 43, №2. – С.45–69.
5. Вігак, В.М. Дослідження плоского напруженого стану в прямокутній області [Текст] / В.М. Вігак, Ю.В. Токовий // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – 38, №2. – С.61–66.
6. Meleshko, V.V. Infinite systems for a biharmonic problem in a rectangle [Text] / V.V. Meleshko, A.M. Gomilko // Proc. Roy. Soc. London, Physical and Engineering Sciences. – 1997. – 453, № 1965. – P.2139–2160.
7. Ревенко, В.П. Дослідження розподілу напружень у прямокутній- пластині під дією розподілених навантажень [Текст] / В.П. Ревенко // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – 43, №3. – С.12–18.
8. Ревенко, В.П. О численно-аналитическом методе расчета напряженного состояния упругой прямоугольной пластины [Текст] / В.П. Ревенко // Прикл. механика. – 2008. – 44, №1. – С.90–98.
9. Meleshko, V.V. Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem [Text] / V.V. Meleshko // Appl. Mech. Rev. – 2003. – 56, №1. – P.33–85.
10. Ревенко, В.П. Про конструктивний аналітично-числовий метод розв'язування плоскої задачі для пластини з кутовими точками [Текст] / В.П. Ревенко // Доп. НАН України. – 2009. – №2. – С.59–66.
11. Ревенко, В.П. Подання напружено-деформованого стану циліндричної оболонки з невеликим прямокутним отвором [Текст] / В.П. Ревенко // Машинознавство. – 2013. – №5–6. – С.21–25.
12. Ревенко, В.П. Визначення напружено-деформованого стану навантаженого на торцях двохшарового циліндра [Текст] / В.П. Ревенко // Міжвузівський збірник «Наукові нотатки». – 2014. – Вип. 44. – С.233–240.

Отримано 24.09.2014