

УДК 539.3:534.222

А. Бомба¹, докт. техн. наук; Ю. Турбал², канд. фіз.-мат. наук

¹Рівненський державний гуманітарний університет

²Національний університет водного господарства та природокористування

МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ БАГАТОСОЛІТОННИХ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ ТИПУ КОРТЕВЕГА ДЕ-ВРІЗА НА ОСНОВІ T-ПРЕДСТАВЛЕНЬ

Резюме. Запропоновано новий підхід до знаходження часткових розв'язків диференціальних рівнянь у частинних похідних, які моделюють одиночну хвилю. Відповідний підхід ґрунтується на використанні T-представлень розв'язків. На цій основі знайдено новий клас солітонних розв'язків рівняння Кортевега де-Вріза та доведено, що відомий солітон рівняння КдВ є частковим випадком запропонованого нами представлення. Запропонований метод може бути застосований і до інших диференціальних рівнянь. Підхід, що ґрунтується на основі T-представлень розв'язків, також може бути використаний для знаходження багатосолітонних розв'язків. У роботі запропоновано метод дослідження взаємодії одиночних хвиль. Відповідний метод продемонстровано на прикладі рівняння Кортевега де-Вріза та отримано двосолітонний розв'язок цього рівняння. Методи, запропоновані в даній роботі, можуть стати основою для досліджень одиночних хвиль та солітонів у рамках інших моделей, що описуються системами диференціальних рівнянь у частинних похідних.

Ключові слова: солітон, багатосолітонний розв'язок, відокремлена хвиля, рівняння КдВ.

A. Bomba, Y. Turbal

METHOD FOR STUDING THE MULTI-SOLITONE SOLUTIONS OF THE KORTEWEG DE-VRIES TYPE EQUATIONS BASED ON THE T-TRANSFORMATION

Summary. In recent years the investigation of separated waves plays an important role in many applied scientific fields. Travelling wave solutions can describe various phenomena in fluid mechanics, hydrodynamics, optics, plasma physics, solid state physics, biology, meteorology and other fields. There are many models proposed to describe the physical phenomena of separated waves existence and variety of methods has been proposed to construct the exact and approximate solutions to nonlinear equations. In this paper, we propose a new technique of finding the PDE's traveling wave solutions, which are based on the T-representation. This generalized representation of solutions has the advantages of classical δ -solitons in terms of their independence from the shape and profile, however, allowed to obtain limited smooth solution that simulates solitary waves. This technique guarantees isolation of a solution and allows to investigate the infinitesimal properties. Using T-representation method we found a new class of KdV solution, which simulate solitary wave and proved that well known KdV solution is a special case of our generalizations. The proposed method can be applied to finding solutions of a wide class of differential equations in partial derivatives in the form of solitary waves. T-representations can be useful for the investigation of multi-soliton solutions. Method for studying multi-soliton solutions is demonstrated on the example of KdV solutions. Multi-soliton solutions are represented as the sum of the T-representations with variable amplitudes. In this case, there are exact solutions for the amplitudes of the perturbations in special areas, which are determined by the maximum of perturbations. Problem of searching the perturbation amplitude is reduced to the Cauchy problem for some initial conditions. Changing conditions for maximum localization of perturbation we cover the area of solitones intersection by a system of curves, where exact solutions for the amplitude functions are found. For an approximate description of the waves interaction quite a few curves are needed. This approach allows to consider different laws of waves motion and simulate their amplitude in the region of intersection. An example of computer simulation is presented in this paper.

Key words: soliton, multi-soliton solutions, Korteweg de-Vries equations, separated waves.

Постановка проблеми Відокремлені хвилі, які здатні зберігати свою форму та характеристики при поширенні на значні відстані, є об'єктом вивчення у багатьох галузях теоретичних та прикладних наукових досліджень. Останнім часом їх досліджують теоретично та експериментально, розробляються нові моделі процесів поширення відокремлених хвиль та солітонів. Для дослідження солітонів та їх взаємодій розроблено низку спеціальних методів, що дозволяють отримувати п-солітонні розв'язки. Однак актуальною проблематикою є розроблення універсальних підходів для дослідження взаємодій відокремлених хвиль, особливо у випадках, коли рівняння не вдається проінтегрувати за допомогою методу оберненої задачі розсіювання.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Існує багато моделей, що описують процеси поширення відокремлених хвиль та методів точного й наближеного розв'язку модельних диференціальних рівнянь. Добре відомі рівняння Кортвега де-Вріза, які описують процеси поширення відокремлених хвиль на мілкій воді та низка їх узагальнень. Зокрема, розглядалися узагальнення виду

$$u_t + (\alpha + \beta u^p)u^p u_x + \gamma u_{xxx} = 0 \quad ([10]); \quad u_t + 6uu_x + u_{xxx} + u_{xxxxx} = 0 \quad ([11]);$$

$$u_t + \alpha u^2 u_x + \beta u_x u_{xx} + \gamma u u_{xxx} + \delta u_{xxxx} = 0 \quad ([11]); \quad u_t = u_{xxxxx} + 10uu_{xxx} + 20u_x u_{xxx} + 30u^2 u_x \quad ([12]);$$

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = -\alpha u_{xx} - \beta u_{xxxx} \quad (\text{рівняння Курамото-Сивашинського-КдВ}, [13]);$$

$$u_t + uu_x + u_{xxx} - u_{xxxx} = 0 \quad (\text{рівняння Кавахари}, [14]); \quad u_t + \nu uu_x + \mu u_{xxx} + \alpha u_{xx} + \gamma u_{xxxx} = 0 \quad ([9]);$$

$$u_t + uu_x + \alpha u_{xx} + \beta u_{xxx} + \gamma u_{xxxx} = 0 \quad (\text{рівняння КдВ-Бюргерса-Курамото}, [9]) \text{ та низка інших.}$$

Ці рівняння моделюють низку явищ, таких, як нескінченно довгі хвилі в стратифікованій воді океану, акустичні хвилі в кристалічній решітці та інші. Останніми роками розроблено низку методів знаходження розв'язків типу біжучої хвилі, таких, як метод оберненої задачі розсіювання [17], методи перетворення Беклунда, трансформацій Дарбу, tanh-метод та його модифікації, метод узагальнених гіперболічних функцій, метод відокремлених змінних, метод експонент.

Метою роботи є розроблення нового методу знаходження розв'язків диференціальних рівнянь типу Кортвега де-Вріза, що моделюють процеси поширення відокремлених хвиль солітонного типу, а також загальної методики дослідження солітон-солітонних взаємодій.

Постановка задачі. Нехай маємо диференціальне рівняння в частинних похідних виду

$$F\left(t, x, \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^n u(x,t)}{\partial x^n}\right) = 0, \quad (1)$$

де $u(x,t)$ – невідома функція, F – поліном. Стоїть завдання знайти розв'язки рівняння (1), які мають солітонну структуру, тобто є локалізованими в просторі рухомими збуреннями.

Одним з відомих методів дослідження відокремлених хвиль є метод пошуку розв'язку, який є нескінченно-тонким δ -солітоном. Під δ -солітоном розуміють функцію виду $w((x-v(t))/\varepsilon) = C\varepsilon\delta(x-v(t)) + O(\varepsilon^n)$, де ε – малий параметр; $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака; C – деяка стала, що є слабким асимптотичним розв'язком рівняння (1). Використання δ -солітонів у розумінні їх асимптотики має суттєві переваги у порівнянні з іншими методами знаходження точних розв'язків, оскільки дозволяє не враховувати форму профілю хвилі. Однак використання узагальнених функцій як моделей процесів поширення відокремлених хвиль та їх взаємодій вимагає

спеціальної фізичної інтерпретації результатів та має певні обмеження, зокрема у застосуванні відповідного математичного апарату в багатовимірному випадку.

Тому виникла необхідність у розробленні деякого узагальненого представлення розв'язків, яке б мало переваги класичних δ -солітонів у частині їх незалежності від форми профілю і, водночас, дозволяло отримувати обмежений гладкий розв'язок, що моделює відокремлену хвилю.

Знаходження розв'язку рівняння КдВ у формі Т-представлення. Нехай $\tilde{x}(t)$ – функція, що описує максимум збурення. Визначимо функцію, що описує форму хвилі у вигляді $\exp(-g(x - \tilde{x}(t)))$, де $g(x)$ – достатньо гладка функція, що задовольняє умови

$$g(x) \geq 0, \quad g(0) = 0, \quad g^{(i)}(0) = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad g''(0) \geq 0. \quad (2)$$

Очевидно, що функція $\gamma \exp(-g(x - \tilde{x}(t))/\varepsilon)$ може описати додатне збурення будь-якої форми, де γ є амплітудою; ε – параметр, що визначає локалізацію збурення. В найпростішому випадку функція $g(x)$ є мірою, що визначена на множині інтервалів в R^1 . Є сенс γ вважати функцією часу. Нижче шукатимемо розв'язки рівнянь виду (1) у вигляді Т-представлень

$$u(x, t) = \gamma(t) \exp(-g(x - \tilde{x}(t))/\varepsilon). \quad (3)$$

Аналогічно для системи диференціальних рівнянь

$$F_i(t, x_1, \dots, x_n, u_t^{(1)}, u_{x_1}^{(1)}, \dots, u_{x_n}^{(1)}, \dots, u_t^{(m)}, u_{x_1}^{(m)}, \dots, u_{x_n}^{(m)}, u_{x_1 x_1}^{(1)}, u_{x_1 x_2}^{(1)}, \dots) = 0, \quad i = \overline{1, k},$$

розв'язок будемо знаходити у вигляді

$$(u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(m)})^T = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_m(t))^T W(x_1, x_2, \dots, x_n, t),$$

де $W(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = \exp(-\mu((x_1, x_2, \dots, x_n), (\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \dots, \tilde{x}_n(t))))/\varepsilon$; $\mu(a, b)$ – функція міри, визначена на множині інтервалів $\{[a, b], a, b \in R^n\}$; ($\mu(\alpha, \beta) = 0$ при $\alpha = \beta$), $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_m(t)$ – амплітудні функції; ε – параметр локалізації збурення; $\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \dots, \tilde{x}_n(t)$ – функції, що визначають траєкторію збурення.

Розглянемо відповідний підхід на прикладі рівняння КдВ

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (4)$$

Знаходимо його розв'язки у формі (3). Отримуємо

$$\begin{aligned} u_x &= -\frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} u = \eta u, \quad \text{де } \eta = -\frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon}, \\ u_{xx} &= \eta_x u + \eta u_x = \eta_x u + \eta^2 u = (\eta_x + \eta^2) u; \\ u_{xxx} &= (\eta_{xx} + 2\eta\eta_x) u + (\eta_x + \eta^2) \eta u = (\eta_{xx} + 3\eta\eta_x + \eta^3) u; \\ u_t &= (\gamma'(t)/\gamma(t) + \frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} \tilde{x}'(t)) u = (\gamma'(t)/\gamma(t) - \eta \tilde{x}'(t)) u. \end{aligned} \quad (5)$$

Підставляючи (5) в (4), отримуємо

$$\begin{aligned}
& (\gamma'(t)/\gamma(t) - \eta\tilde{x}'(t))u + 6\eta u + (\eta_{xx} + 3\eta\eta_x + \eta^3)u = 0, \\
& (\gamma'(t)/\gamma(t) + \frac{g'(x - \tilde{x}(x,t))}{\varepsilon} \tilde{x}'_t(t))u - 6 \frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} u^2 - \\
& - \frac{g'''(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} u + 3 \frac{g''(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} \frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} u - \left(\frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} \right)^3 u = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Нехай $x - \tilde{x}(t) = 0$. Тоді, враховуючи (1), з рівняння (6) отримуємо умову

$$\gamma'(t)/\gamma(t)u = 0.$$

Отже, можемо сформулювати тривіальне твердження.

Твердження 0. Розв'язки рівняння КдВ типу біжучої хвилі мають сталу амплітуду.

З рівняння (6) отримуємо

$$\begin{aligned}
& -\eta\tilde{x}'(t)u + 6\eta u + (\eta_{xx} + 3\eta\eta_x + \eta^3)u = 0, \\
& \frac{g'(x - \tilde{x}(x,t))}{\varepsilon} \tilde{x}'_t(t)u - 6 \frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} u^2 - \frac{g'''(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} u + 3 \frac{g''(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} \frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} u - \\
& - \left(\frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} \right)^3 u = 0,
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
& -\eta\tilde{x}'(t)u + 6\eta u + (\eta_{xx} + 3\eta\eta_x + \eta^3)u + (\eta_{xxx} + 10\eta_x\eta_{xx} + 5\eta\eta_{xxx} + 15\eta\eta_x^2 + 10\eta^2\eta_{xx} + \\
& + 10\eta^3\eta_x + \eta^5)u = 0.
\end{aligned}$$

Рівняння (7) визначає загальні умови для функцій $g(x)$ та $\tilde{x}(t)$ у представленні (2). Сформулюємо наступні твердження.

Твердження 1. Нескінченно-широкий солітон (3) ($\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} u(x,t)$) є тривіальним розв'язком рівняння КдВ.

Дійсно,

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left(\frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} \tilde{x}'_t(t) - 6 \frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} u + \left(-\frac{g'''(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} + 3 \frac{g''(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} \frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{g'(x - \tilde{x}(x,t))}{\varepsilon} \tilde{x}_{xxx}(x,t) - \left(\frac{g'(x - \tilde{x}(x,t))}{\varepsilon} \right)^3 (1 - \tilde{x}_x(x,t))^3 \right) u = 0, \right. \\
& \left. \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} u(x,t) = \gamma. \right.
\end{aligned}$$

Твердження 2. Нескінченно-тонкий солітон (3) ($\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x,t)$) є розв'язком рівняння КдВ.

Твердження випливає зі співвідношень

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} \tilde{x}'_t(t) - 6 \frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} u \right) u + \\
& + \left(-\frac{g'''(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} + 3 \frac{g''(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} \frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} - \left(\frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} \right)^3 \right) u = 0,
\end{aligned}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \exp(-y^2/\varepsilon)/\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \exp(-y^2/\varepsilon)/\varepsilon^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \exp(-y^2/\varepsilon)/\varepsilon^3 = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \exp(-y^2/\varepsilon)/\varepsilon = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(-y^2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x/\exp(y^2x) = 0.$$

Розглянемо випадок, коли $\tilde{x}(x, t) = vt$. Тоді згідно (7) матимемо:

$$\frac{g'(x-vt)}{\varepsilon} v - 6 \frac{g'(x-vt)}{\varepsilon} \gamma e^{-\frac{g(x-vt)}{\varepsilon}} - \frac{g'''(x-vt)}{\varepsilon} + 3 \frac{g''(x-vt)}{\varepsilon} \frac{g'(x-vt)}{\varepsilon} - \left(\frac{g'(x-vt)}{\varepsilon} \right)^3 = 0. \quad (8)$$

Нехай $g(x)/\varepsilon = \tilde{g}(x)$, $x-vt = y$. Тоді з рівняння (8) отримуємо

$$\tilde{g}'''(y) - 3\tilde{g}''(y)\tilde{g}'(y) + (\tilde{g}'(y))^3 - v\tilde{g}'(y) + 6\gamma\tilde{g}'(y)e^{-\tilde{g}(y)} = 0.$$

А в результаті підстановок $\tilde{g}'(y) = p(\tilde{g})$, $w = p^2$ останнє рівняння запишемо у вигляді

$$w''/2 - 3w'/2 + w = v - 6\gamma e^{-\tilde{g}}. \quad (9)$$

Загальний розв'язок рівняння (9) має вигляд

$$w = b - 2\gamma e^{-\tilde{g}} + C_1 e^{2\tilde{g}} + C_2 e^{\tilde{g}}.$$

Тоді за умов $b - 2\gamma e^{-\tilde{g}} + C_1 e^{2\tilde{g}} + C_2 e^{\tilde{g}} \geq 0$, $b - 2\gamma + C_1 + C_2 = 0$ та (2) можемо визначити функцію $\tilde{g}(y)$, як розв'язок задачі Коші

$$\tilde{g}'(y) = \text{sign}(y) \sqrt{b - 2\gamma e^{-\tilde{g}} + C_1 e^{2\tilde{g}} + C_2 e^{\tilde{g}}}, \quad (10)$$

$$\tilde{g}(0) = 0.$$

Покажемо, що відомий солітонний розв'язок [17] рівняння КдВ

$$u(x, t) = 2\chi^2 ch^{-2} \chi(x - 4\chi^2 t - \varphi) \quad (11)$$

є частковим випадком представлень (3), де χ , φ – деякі параметри.

Дійсно, поклавши в (10) $C_1 = C_2 = 0$, $a = 0$, матимемо $v = 2\gamma$. Тоді задачу (10) запишемо у формі

$$g'(y) = \sqrt{v - v e^{-g}}, \quad g(0) = 0. \quad (12)$$

Враховуючи (11) та (2), отримаємо

$$2\chi^2 ch^{-2}(\chi(x - 4\chi^2 t - \varphi)) = v \exp(-g(x - vt - \varphi))/2.$$

Тоді

$$g(x - vt - \varphi) = 2 \ln ch(\chi(x - vt - \varphi)) \quad (13)$$

або

$$g(y) = 2 \ln ch(\chi y). \quad (14)$$

Диференціюючи $g(y)$ при $v = 4\chi^2$, отримуємо $g'(y) = \frac{2\chi sh(\chi y)}{ch(\chi y)}$.

Підставляючи (14) у праву частину (12), отримаємо

$$2\chi\sqrt{sh^2(\chi y)/ch^2(\chi y)} = 2\chi sh(\chi y)/ch(\chi y) = g'(y).$$

Метод дослідження багатосолітонних взаємодій на основі Т-представлень.

Нехай $u_i(x, t) = \gamma_i \exp(-g_i(x - \tilde{x}_i(t))/\varepsilon_i)$, $i = 1, 2$ – точні розв'язки рівняння КдВ. Згідно з твердженням 0, відповідні хвилі мають сталу амплітуду. Очевидно, що функція $u_1(x, t) + u_2(x, t)$ не є точним розв'язком рівняння КдВ в силу його нелінійності. Тому розглянемо наступне узагальнення. Нехай параметри, що визначають амплітуди, є функціями часу, $\gamma_i = \gamma_i(t)$, $u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$. Введемо деякі ефективні радіуси локалізації солітонів R_δ^1, R_δ^2

$$R_\delta^1 = \min\{R : |u_1(x, t)| < \delta, |x - \tilde{x}_1(t)| > R\}, R_\delta^2 = \min\{R : |u_2(x, t)| < \delta, |x - \tilde{x}_2(t)| > R\}.$$

Позначимо відповідно $G_\delta^1(t) = \{x : |x - \tilde{x}_1(t)| < R_\delta^1\}$, $G_\delta^2(t) = \{x : |x - \tilde{x}_2(t)| < R_\delta^2\}$. Очевидно, що функція $u(x, t)$ задовольнятиме рівняння КдВ в області $\{G_\delta^1 \cap \overline{G_\delta^2} \cup \overline{G_\delta^1} \cap G_\delta^2 \cup \overline{G_\delta^1} \cap \overline{G_\delta^2}\}$ з точністю $O(\delta)$, якщо $u_i(x, t)$ є точними розв'язками рівняння КдВ. Згідно з твердженням 0 повинна виконуватись умова $\gamma_i(t) = \gamma_i = const$ при $|\tilde{x}_2(t) - \tilde{x}_1(t)| > R_\delta^1 + R_\delta^2$.

Підставивши суму $u_1(x, t) + u_2(x, t)$ в рівняння (4), отримуємо

$$\begin{aligned} & (u_1)_t + (u_2)_t + 6(u_1 + u_2)(u_{1x} + u_{2x}) + u_{1xxx} + u_{2xxx} = 0, \\ & \gamma_1'(t) \exp(-g_1(x - \tilde{x}_1(t))/\varepsilon_1) + g_1'(x - \tilde{x}_1(t))\tilde{x}_1'(t)u_1/\varepsilon_1 + \\ & + \gamma_2'(t) \exp(-g_2(x - \tilde{x}_2(t))/\varepsilon_2) + g_2'(x - \tilde{x}_2(t))\tilde{x}_2'(t)u_2/\varepsilon_2 + \\ & + 6(u_1 + u_2)(-g_1'(x - \tilde{x}_1(t))u_1/\varepsilon_1 - g_2'(x - \tilde{x}_2(t))u_2/\varepsilon_2) + \\ & + (-g_1'''(x - \tilde{x}_1(t))/\varepsilon_1 + 3g_1'(x - \tilde{x}_1(t))g_1''(x - \tilde{x}_1(t))/\varepsilon_1^2 - \\ & - (g_1'(x - \tilde{x}_1(t)))^3/\varepsilon_1^3)u_1 + ((-g_2'''(x - \tilde{x}_2(t))/\varepsilon_2 + 3g_2'(x - \tilde{x}_2(t))g_2''(x - \tilde{x}_2(t))/\varepsilon_2^2 - \\ & - (g_2'(x - \tilde{x}_2(t)))^3/\varepsilon_2^3)u_2 = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

При $x = \tilde{x}_1(t)$ та $x = \tilde{x}_2(t)$, з рівняння (15) отримуємо систему

$$\begin{aligned} & \gamma_1'(t) + \gamma_2'(t) \exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2) + g_2'(-d(t))\tilde{x}_2'(t)\gamma_2(t) \exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2)/\varepsilon_2 + \\ & + 6(\gamma_1(t) + \gamma_2(t) \exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2))(-g_2'(-d(t))u_2/\varepsilon_2) + \\ & + (-g_2'''(-d(t))/\varepsilon_2 + 3g_2'(-d(t))g_2''(-d(t))/\varepsilon_2^2 - \\ & - (g_2'(-d(t)))^3/\varepsilon_2^3)\gamma_2(t) \exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2) = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} & \gamma_1'(t) \exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1) + \gamma_2'(t) + g_1'(d(t))\tilde{x}_1'(t)\gamma_1(t) \exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1)/\varepsilon_1 + \\ & + 6(\gamma_1(t) \exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1) + \gamma_2(t))(-g_1'(d(t))\gamma_1(t) \exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1)/\varepsilon_1) + \\ & + (-g_1'''(d(t))/\varepsilon_1 + 3g_1'(d(t))g_1''(d(t))/\varepsilon_1^2 - \\ & - (g_1'(d(t)))^3/\varepsilon_1^3)\gamma_1(t) \exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1) = 0, \end{aligned}$$

де $d(t) = \tilde{x}_2(t) - \tilde{x}_1(t)$.

Звідси

$$\begin{aligned}
 \gamma_1'(t) &= -g_2'(-d(t))\tilde{x}_2'(t)\gamma_2(t)\exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2)/\varepsilon_2 - \\
 &-6(\gamma_1(t) + \gamma_2(t)\exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2))(-g_2'(-d(t))\gamma_2(t)\exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2)/\varepsilon_2) + \\
 &+(g_2'''(-d(t))/\varepsilon_2 - 3g_2'(-d(t))g_2''(-d(t))/\varepsilon_2^2 + (g_2'(-d(t)))^3/\varepsilon_2^3)\gamma_2(t)\exp(-g_2(-d(t))/ \\
 &/\varepsilon_2) - (-g_1'(d(t))\tilde{x}_1'(t)\gamma_1(t)\exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1)/\varepsilon_1 - \\
 &-6(\gamma_1(t)\exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1) + \gamma_2(t))(-g_1'(d(t))\gamma_1(t)\exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1)/\varepsilon_1) + \\
 &+(g_1'''(d(t))/\varepsilon_1 - 3g_1'(d(t))g_1''(d(t))/\varepsilon_1^2 + (g_1'(d(t)))^3/\varepsilon_1^3)\gamma_1(t)\exp(- \\
 &g_1(d(t))/\varepsilon_1)\exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2))/(1 - \exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1 - g_2(-d(t))/\varepsilon_2)); \\
 \gamma_2'(t) &= -g_1'(d(t))\tilde{x}_1'(t)\gamma_1(t)\exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1)/\varepsilon_1 - \\
 &-6(\gamma_1(t)\exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1) + \gamma_2(t))(-g_1'(d(t))\gamma_1(t)\exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1)/\varepsilon_1) + \\
 &+(g_1'''(d(t))/\varepsilon_1 - 3g_1'(d(t))g_1''(d(t))/\varepsilon_1^2 + (g_1'(d(t)))^3/\varepsilon_1^3)\gamma_1(t)\exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1) - \\
 &-\exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1)(-g_2'(-d(t))\tilde{x}_2'(t)\gamma_2(t)\exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2)/\varepsilon_2 - \\
 &-6(\gamma_1(t) + \gamma_2(t)\exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2))(-g_2'(-d(t))\gamma_2(t)\exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2)/\varepsilon_2) + \\
 &+(g_2'''(-d(t))/\varepsilon_2 - 3g_2'(-d(t))g_2''(-d(t))/\varepsilon_2^2 + (g_2'(-d(t)))^3/\varepsilon_2^3)\gamma_2(t) \times \\
 &\times \exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2))/(1 - \exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1 - g_2(-d(t))/\varepsilon_2).
 \end{aligned} \tag{17}$$

Записавши очевидні початкові умови $\gamma_1(0) = \gamma_1, \gamma_2(0) = \gamma_2$, отримуємо задачу Коші відносно невідомих амплітудних функцій $\gamma_i(t)$, яку можемо розв'язати при відомих швидкостях руху хвиль $\tilde{x}_1'(t), \tilde{x}_2'(t)$. Таким чином, знаходимо точні розв'язки рівняння КдВ на множині $\Omega_1 = \{(x, t) : x = \tilde{x}_1(t) \vee x = \tilde{x}_2(t)\}$.

Нехай, наприклад, $\tilde{x}'_i(t) = c_i \gamma_i(t), c_i = 2, i = 1, 2$. Випадок, коли $c_i = 2$ відповідає відомому солітонному розв'язку рівняння КдВ (11), для якого швидкість за модулем дорівнює подвійній амплітуді.

Тоді з (17) отримуємо систему

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}'_1(t) &= 2\gamma_1(t), \\
 \tilde{x}'_2(t) &= 2\gamma_2(t),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_1'(t) = & -g_2'(-d(t))c_2\gamma_2^2(t)\exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2)/\varepsilon_2 - \\
& -6(\gamma_1(t) + \gamma_2(t)\exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2))(-g_2'(-d(t))\gamma_2(t)\exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2)/\varepsilon_2) + \\
& + (g_2'''(-d(t))/\varepsilon_2 - 3g_2'(-d(t))g_2''(-d(t))/\varepsilon_2^2 + (g_2'(-d(t)))^3/\varepsilon_2^3)\gamma_2(t) \times \\
& \times \exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2) - (g_1'(d(t))\tilde{x}_1'(t)\gamma_1(t)\exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1)/\varepsilon_1 - \\
& -6(\gamma_1(t)\exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1) + \gamma_2(t))(-g_1'(d(t))\gamma_1(t)\exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1)/\varepsilon_1) + \\
& + (g_1'''(d(t))/\varepsilon_1 - 3g_1'(d(t))g_1''(d(t))/\varepsilon_1^2 + (g_1'(d(t)))^3/\varepsilon_1^3)\gamma_1(t)\exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1)) \times \\
& \times \exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2)/(1 - \exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1 - g_2(-d(t))/\varepsilon_2)), \\
\gamma_2'(t) = & -g_1'(d(t))c_1\gamma_1^2(t)\exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1)/\varepsilon_1 - \\
& -6(\gamma_1(t)\exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1) + \gamma_2(t))(-g_1'(d(t))\gamma_1(t)\exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1)/\varepsilon_1) + \\
& + (g_1'''(d(t))/\varepsilon_1 - 3g_1'(d(t))g_1''(d(t))/\varepsilon_1^2 + (g_1'(d(t)))^3/\varepsilon_1^3)\gamma_1(t)\exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1) - \\
& - \exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1)(-g_2'(-d(t))\tilde{x}_2'(t)\gamma_2(t)\exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2)/\varepsilon_2 - \\
& -6(\gamma_1(t) + \gamma_2(t)\exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2))(-g_2'(-d(t))\gamma_2(t)\exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2)/\varepsilon_2) + \\
& + (g_2'''(-d(t))/\varepsilon_2 - 3g_2'(-d(t))g_2''(-d(t))/\varepsilon_2^2 + (g_2'(-d(t)))^3/\varepsilon_2^3)\gamma_2(t) \times \\
& \times \exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2))/(1 - \exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1 - g_2(-d(t))/\varepsilon_2)).
\end{aligned} \tag{18}$$

На рис.1 представлено графічну ілюстрацію розв'язків (18) для випадку, коли функції g_1, g_2 визначаються співвідношенням (14).

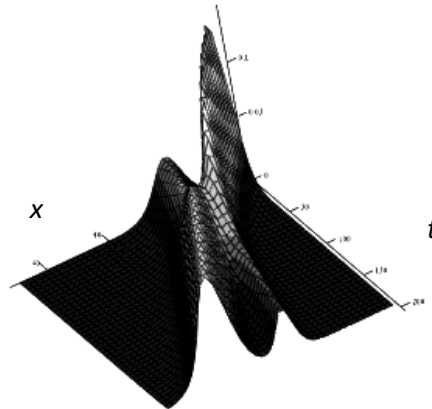


Рисунок 1. Взаємодія солітонів

Figure 1. The solitones intersection

Очевидно, що запропонований розв'язок у формі $u_1(x, t) + u_2(x, t)$ є наближеним і рівняння КдВ перетворюється у рівність лише на множині Ω_1 . Для подальшого уточнення розв'язку $u(x, t)$ розглянемо функції виду

$u_1^1(x, t) = \gamma_1^1(t) \exp(-g_1(x - \tilde{x}_1(t) - \alpha)/\varepsilon_1)$, $u_2^1(x, t) = \gamma_2^1(t) \exp(-g_2(x - \tilde{x}_2(t) - \beta)/\varepsilon_1)$, де α, β – деякі параметри, та підставляємо їх суму в рівняння КдВ. (Для спрощення запису верхні індекси амплітудних функцій будемо опускати). Використовуючи підхід, аналогічний розглянутому вище, при $x = \tilde{x}_1(t) + \alpha$ $x = \tilde{x}_2(t) + \beta$, отримуємо систему

$$\begin{aligned}
& \gamma_1'(t) \exp(-g_1(\alpha)/\varepsilon_1) + \gamma_2'(t) \exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2) + g_1'(\alpha) \tilde{x}_1'(t) \tilde{u}_1(\alpha, t)/\varepsilon_1 + \\
& + g_2'(-d(t)) \tilde{x}_2'(t) \gamma_2(t) \exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2)/\varepsilon_2 + \\
& + 6(\gamma_1(t) \exp(-g_1(\alpha)/\varepsilon_1) + \gamma_2(t) \exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2))(-g_1'(\alpha) \tilde{u}_1(\alpha, t)/\varepsilon_1 - \\
& - g_2'(-d(t)) u_2(-d(t), t)/\varepsilon_2) + (-g_1''(\alpha)/\varepsilon_1 + 3g_1'(\alpha) g_1''(\alpha)/\varepsilon_1^2 - (g_1'(\alpha))^3/\varepsilon_1^3) \tilde{u}_1(\alpha, t) + \\
& + (-g_2''(-d(t))/\varepsilon_2 + 3g_2'(-d(t)) g_2''(-d(t))/\varepsilon_2^2 - \\
& - (g_2'(-d(t)))^3/\varepsilon_2^3) \gamma_2(t) \exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2) = 0, \\
& \gamma_1'(t) \exp(-g_1(d_1(t))/\varepsilon_1) + \gamma_2'(t) \exp(-g_2(\beta)/\varepsilon_2) + g_1'(d_1(t)) \tilde{x}_1'(t) u_1(d_1(t), t)/\varepsilon_1 + \\
& + g_2'(\beta) \tilde{x}_2'(t) u_2(\beta, t)/\varepsilon_2 + 6(\gamma_1(t) \exp(-g_1(d_1(t))/\varepsilon_1) + \\
& + \gamma_2(t) \exp(-g_2(\beta)/\varepsilon_2))(-g_1'(d_1(t)) \gamma_1(t) \exp(-g_1(d_1(t))/\varepsilon_1)/\varepsilon_1 - \\
& - g_2'(\beta) \tilde{u}_2(\beta, t)/\varepsilon_2) + ((-g_2''(\beta)/\varepsilon_2 + 3g_2'(\beta) g_2''(\beta)/\varepsilon_2^2 - (g_2'(\beta))^3/\varepsilon_2^3) \tilde{u}_2(\beta, t) + \\
& + (-g_1''(d_1(t))/\varepsilon_1 + 3g_1'(d_1(t)) g_1''(d_1(t))/\varepsilon_1^2 - (g_1'(d_1(t)))^3/\varepsilon_1^3) \gamma_1(t) \exp(-g_1(d_1(t))/\varepsilon_1) = 0, \\
& \text{де } d(t) = \tilde{x}_2(t) - \tilde{x}_1(t) - \alpha, \quad \tilde{u}_i(x, t) = \gamma_i'(t) \exp(-g_i(x)/\varepsilon_i), \quad d_1(t) = \tilde{x}_2(t) + \beta - \tilde{x}_1(t).
\end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned}
& \gamma_1'(t) = -\exp(-g_2(\beta)/\varepsilon_2)(g_1'(\alpha) \tilde{x}_1'(t) \tilde{u}_1(\alpha, t)/\varepsilon_1 + g_2'(-d(t)) \tilde{x}_2'(t) \gamma_2(t) \times \\
& \times \exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2)/\varepsilon_2 + 6(\gamma_1(t) \exp(-g_1(\alpha)/\varepsilon_1) + \gamma_2(t) \exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2)) \times \\
& \times (-g_1'(\alpha) \tilde{u}_1(\alpha, t)/\varepsilon_1 - g_2'(-d(t)) \tilde{u}_2(-d(t), t)/\varepsilon_2) + (-g_1''(\alpha)/\varepsilon_1 + \\
& + 3g_1'(\alpha) g_1''(\alpha)/\varepsilon_1^2 - (g_1'(\alpha))^3/\varepsilon_1^3) \tilde{u}_1(\alpha, t) + (-g_2''(-d(t))/\varepsilon_2 + \\
& + 3g_2'(-d(t)) g_2''(-d(t))/\varepsilon_2^2 - (g_2'(-d(t)))^3/\varepsilon_2^3) \gamma_2(t) \exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2) + \\
& + (g_1'(d_1(t)) \tilde{x}_1'(t) \gamma_1(t) \exp(-g_1(d_1(t))/\varepsilon_1)/\varepsilon_1 + g_2'(\beta) \tilde{x}_2'(t) \tilde{u}_2(\beta, t)/\varepsilon_2 + \\
& + 6(\gamma_1(t) \exp(-g_1(d_1(t))/\varepsilon_1) + \gamma_2(t) \exp(-g_2(\beta)/\varepsilon_2))(-g_1'(d_1(t)) \gamma_1(t) \times \\
& \times \exp(-g_1(d_1(t))/\varepsilon_1)/\varepsilon_1 - g_2'(\beta) \tilde{u}_2(\beta, t)/\varepsilon_2) + ((-g_2''(\beta)/\varepsilon_2 + 3g_2'(\beta) g_2''(\beta)/\varepsilon_2^2 - \\
& - (g_2'(\beta))^3/\varepsilon_2^3) \tilde{u}_2(\beta, t) + (-g_1''(d_1(t))/\varepsilon_1 + 3g_1'(d_1(t)) g_1''(d_1(t))/\varepsilon_1^2 - \\
& - (g_1'(d_1(t)))^3/\varepsilon_1^3) \tilde{u}_1(d_1(t), t)/\varepsilon_1) \exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2) / \\
& / (\exp(-g_1(\alpha)/\varepsilon_1 - g_2(\beta)/\varepsilon_2) - \exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1 - g_2(-d_1(t))/\varepsilon_2), \\
& \gamma_2'(t) = -\exp(-g_1(\alpha)/\varepsilon_1)(g_1'(d_1(t)) \tilde{x}_1'(t) \gamma_1(t) \exp(-g_1(d_1(t))/\varepsilon_1)/\varepsilon_1 + \\
& + g_2'(\beta) \tilde{x}_2'(t) u_2/\varepsilon_2 + 6(\gamma_1(t) \exp(-g_1(d_1(t))/\varepsilon_1) + \gamma_2(t) \exp(-g_2(\beta)/\varepsilon_2)) \times \\
& \times ((-g_1'(d_1(t)) \gamma_1(t) \exp(-g_1(d_1(t))/\varepsilon_1)/\varepsilon_1 - g_2'(\beta) u_2/\varepsilon_2) + ((-g_2''(\beta)/\varepsilon_2 + \\
& + 3g_2'(\beta) g_2''(\beta)/\varepsilon_2^2 - (g_2'(\beta))^3/\varepsilon_2^3) u_2 + (-g_1''(d_1(t))/\varepsilon_1 + \\
& + 3g_1'(d_1(t)) g_1''(d_1(t))/\varepsilon_1^2 - (g_1'(d_1(t)))^3/\varepsilon_1^3) \gamma_1(t) \exp(-g_1(d_1(t))/\varepsilon_1) + \\
& + \exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1)(g_1'(\alpha) \tilde{x}_1'(t) u_1/\varepsilon_1 + g_2'(-d(t)) \tilde{x}_2'(t) \gamma_2(t) \times \\
& \times \exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2)/\varepsilon_2 + 6(\gamma_1(t) \exp(-g_1(\alpha)/\varepsilon_1) + \gamma_2(t) \exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2)) \times \\
& \times (-g_1'(\alpha) u_1/\varepsilon_1 - g_2'(-d(t)) u_2/\varepsilon_2) + (-g_1''(\alpha)/\varepsilon_1 + 3g_1'(\alpha) g_1''(\alpha)/\varepsilon_1^2 - \\
& - (g_1'(\alpha))^3/\varepsilon_1^3) u_1 + (-g_2''(-d(t))/\varepsilon_2 + 3g_2'(-d(t)) g_2''(-d(t))/\varepsilon_2^2 - \\
& - (g_2'(-d(t)))^3/\varepsilon_2^3) \gamma_2(t) \exp(-g_2(-d(t))/\varepsilon_2) / (\exp(-g_1(\alpha)/\varepsilon_1 - g_2(\beta)/\varepsilon_2) - \\
& - \exp(-g_1(d(t))/\varepsilon_1 - g_2(-d_1(t))/\varepsilon_2).
\end{aligned} \tag{19}$$

Записавши очевидні початкові умови $\gamma_1(0) = \gamma_1^0 \exp(-g_1(\alpha)/\varepsilon_1)$, $\gamma_2(0) = \gamma_2^0 \exp(-g_2(\beta)/\varepsilon_2)$, отримуємо нову серію задач Коші, на основі розв'язків яких будуватимемо точний розв'язок рівняння КдВ на множинах $\Omega_{\alpha,\beta} = \{(x,t) : x = \tilde{x}_1(t) + \alpha, x = \tilde{x}_2(t) + \beta\}$.

Аналогічно можемо розглядати різні закони руху. Нехай, наприклад, $\tilde{x}_i(t) = c_i \gamma_i(t)t + x_i^0$, $\tilde{x}'_i(t) = c_i \gamma'_i(t)t + c_i \gamma_i(t)$. Для цього закону руху будуємо аналогічні задачі Коші для амплітудних функцій та їх уточнення. Відповідні розв'язки наведено на рис.2.

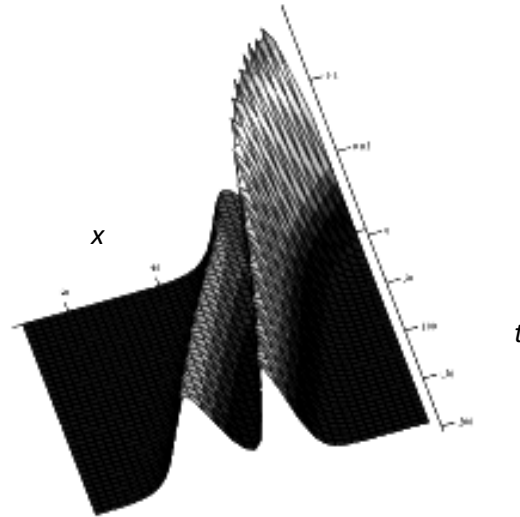


Рисунок 2. Взаємодія солітонів у випадку спеціального закону руху

Figure 2. The solitons intersection in the case of special travelling

Висновки. Це основі Т-представлень знайдено узагальнення відомих солітонних розв'язків рівняння КдВ. Показано, що солітон Кортевега де-Вріза є частковим випадком відповідних узагальнень, знайдених у формі Т-представлень. Очевидно, що при умовах (2) Т-представлення (3) дозволяє описати хвилю з будь-якою формою профілю за умови додатності збурення.

Зауважимо, що запропонований нами метод з точки зору математичного апарату є значно простішим від відомих підходів, зокрема методу оберненої задачі розсіювання. Він не дає точних розв'язків у багатосолітонних випадках, як, наприклад, методи зворотної задачі розсіювання, Хірої [17] та ін. Однак він має в певному сенсі універсальний характер, оскільки не вимагає, наприклад, розв'язувати обернену задачу з відновлення потенціалу рівняння Шредингера за даними розсіювання з використанням інтегрального рівняння Гельфанда-Левітана-Марченко [17], яку, очевидно, не завжди вдається розв'язати.

Відповідний метод ми проілюстровали на прикладі рівняння КдВ. Очевидно, що такий підхід можна використати для аналізу багатосолітонних взаємодій у моделях, що описуються іншими диференціальними рівняннями в частинних похідних.

Conclusions. In this paper, we propose a new technique of finding the PDE's traveling wave solutions; this technique is based on the T-transformations. Using T-representation method we find a new class of KdV solution and prove that well known solution (11) is a partial case of representation (2).

The proposed method can be applied to finding solutions of other differential equations in partial derivatives in the form of solitary waves. Besides, this method can be useful for the investigation of multi-solitone solutions.

Список використаної літератури

1. Asarai, A. Infinite Series Method for Solving the Improved Modified KdV Equation [Text] / A. Asarai // Studies in Mathematical Sciences, 2012 – V.4, N.2. – P.25–31.
2. Miura, M.R. Backlund Transformation [Text] / M.R. Miura. – Berlin: Springer-Verlag, 1978.
3. Matveev, V.B. Darboux Transformations and Solitons [Text] / V.B. Matveev, M.A. Salle. – Berlin: Springer, 1991.
4. Parkes E.J. An Automated Tanh-Function Method for Finding Solitary Wave Solution to Nonlinear Evolution Equations [Text] / E.J. Parkes, B.R. Duffy // Comput. Phys. Commun, 1996. – №98. – P.288–300.
5. Evans, D.J. The Tanh Function Method for Solving Some Important Non-Linear Partial Differential Equation [Text] / D.J. Evans, K.R. Raslan // Int. J. comput. Math, 2005. – №82. – P.897–905.
6. Fan, E. Extended Tanh-Function Method and Its Applications to Nonlinear Equations. [Text] / E. Fan // Phys. Lett. A., 2000. – №277. – P.212–218.
7. Elwakil, S.A. Modified Extended Tanh-Function Method For Solving Nonlinear Partial Differential Equations [Text] / S.A. Elwakil, E.L. Labany, S.K. Zahran, M.A. Sabry // Phys. Lett, 2002. – A., 299. – P.179–188.
8. Gao, Y.T. Generalized Hyperbolic-Function Method with Computerized Symbolic Computation to Construct the Solitonic Solutions to Nonlinear Equations of Mathematical Physics [Text] / Y.T. Gao, B. Tian. // Comput. Phys. Commun, 2001. – №133. – P.158–164.
9. Kim, J.M. New Exact Solutons to the Kdv-Burgers-Kuramoto Equation whith the Exp-Function Method [Text] / J.M. Kim, C. Chun // Abstract and Applied Analysis, 2012. – Volume 2012. – Article ID 892420.
10. Krishnan, E.V. Higher-order KdV-Type Equations and their stability [Text] / E.V. Krishnan, Q.J.A. Khan // IJMMS, 2001. – 27:4. – P.215–220.
11. Adomian, G. The fifth-order kortevæg-de vries equation [Text] / G. Adomian // Internet J. Math. & Math. Sci., 1996. – Vol.19, No.2. – P.415.
12. Huda, O. Bakodah Modified Adomain Decomposition Method for the Generealized Fifth order KdV Equation [Text] / O. Huda // American journal of computational mathematics, 2013. №3. – P.53–58.
13. Maomao, C. The Coupled Kuramoto Sivashinsky-KDV Equations for Surface Wave in Multilayed Liquid Films [Text] / C. Maomao, L. Dening, C. Rattanakul // Mathematical Physics, 2013. – Volume 2013. – Article ID 673546.
14. Doronin, G. Well and ill-posed problems for the KdV and Kawahara equations [Text] / G. Doronin, N.A. Larkin // Bol. Soc. Paran. Mat., 2008 – (3s.) v.26. – P.133–137.
15. Salas, A.H. Exact Solutions for a Third-Order KdV Equation whith Variable Coefficients and Forcing Term [Text] / A.H. Salas, C.A. Gomez // Mathematical Problems in Engineering, 2009. – Volume 2009. – Article ID 737928.
16. Turbal, Y. The trajectories of self-reinforcing solitary wave in the gas disc of galaxies [Text] / Y. Turbal // Proceedings of the 3-rd International Conference on Nonlinear Dynamic. Kharkov, 2010. – P.112–118.
17. Рыскин, Н.М. Нелинейные волны: учеб. пособие для вузов [Текст] / Н.М. Рыскин, Д.И. Трубецков. – М.: Наука. Физматлит, 2000. – 272 с.

Отримано 22.12.2014