

УДК 539.3

**О. Кравчишин, канд. фіз.-мат. наук**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

## **ПОЧАТКОВЕ НАБЛИЖЕННЯ ДЛЯ ІТЕРАЦІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ПОШИРЕННЯ МАЛИХ ПРУЖНИХ ЗБУРЕНЬ У ТРИВИМІРНОМУ ПОЛІ НАПРУЖЕНЬ**

**Резюме.** Розроблену раніше математичну модель динаміки пружних збурень у неоднорідно деформованому континуумі застосовано для отримання співвідношень акустопружності за поширення хвилі у тривимірному полі деформації. У середньоінтегральному вздовж напрямку поширення зондувального імпульсу наближенні отримано вирази для фазових швидкостей хвиль різної поляризації як функцій від розподілу компонент тривимірного тензора деформації на цьому напрямку. Записані співвідношення використано для числового оцінювання відносних похибок фазових швидкостей плоскої хвилі, що поширюється у безмежному просторі з початковими деформаціями, зумовленими дією у початку координат у напрямку осі аплікат зосередженої сили, порівняно із відповідними швидкостями у недеформованому середовищі. Отримані співвідношення можна використати для оцінювання напружено-деформованого стану у досліджуваному об'єкті.

**Ключові слова:** неоднорідний деформований стан, зондувальні пружні збурення, фазові швидкості, середньоінтегральні наближення поля деформації, співвідношення акустопружності.

**O. Kravchyshyn**

## **THE INITIAL APPROXIMATION FOR ITERATIVE SOLUTION OF THE PROBLEM OF PROPAGATION OF SMALL ELASTIC DISTURBANCES IN 3-D STRESS FIELD**

**Summary.** The present stress-strain state in the structural elements, geological systems, biological structures, etc. influences essentially their operation properties, reliability and durability. Acoustic method, the basis of interrelation between the stress-strain state and characteristics of wave field, phase velocities, in particular, is one of the ways of its detection. Therefore, development of mathematical models describing the interrelation of the parameters of sounding field in a solid body with the components of the tensor of initial deformations in it is an important scientific and practical problem.

The developed earlier mathematical model of dynamics of elastic disturbances in in-homogeneously deformed continuum to solve the problem of propagation of plane harmonic waves in 3-D field inhomogeneous initial deformations is used. This model represents the Cauchy problem for a system of three differential equations of hyperbolic type with variable coefficients. To obtain solution of the problem the iteration procedure is used, in initial (zero) approximation of which the in homogeneously field of initial deformations is approximated by mean-integral values along the directions of propagation in the zero approximation the relations of acousto-elasticity are obtained. They connect the phase velocity of waves of different polarizations with distribution of the component of 3-D strain tensor on this direction. Previously the analogous expression were obtained for the cases of propagation of the sounding pulse in the body in the state of plane deformation, when the wave propagates in the flat plane of symmetry and perpendicularly to it. The written relations are used to solve numerically the problem on propagation of plane wave an infinite space with initial deformations caused by the action of the applicator of concentrated force in the coordinate origin in the axis direction. The obtained numerical estimates of relative errors of phase velocities are compared with the corresponding velocities in non-deformed medium. The constructed relations can be used to formulate the direct and inverse problems of acoustic tomography of 3-D stress-strain state in a solid body.

*Key words: non-uniform deformed state, sounding elastic perturbations, phase velocities, mean-integral approximation of strain field, relations of acousto-elasticity.*

**Постановка проблеми.** Як відомо, наявність напружено-деформованого стану в елементах конструкцій, деталях машин, геологічних системах, біологічних структурах і т.п. суттєво впливає на їхні експлуатаційні властивості, надійність та довговічність. Тому кожного разу, як виникає потреба кількісного оцінювання експлуатаційних характеристик матеріалів, слід розв'язувати задачу визначення напружено-деформованого стану твердих тіл, для формулювання якої не в усіх випадках априорі є відомими вхідні дані (зовнішні навантаження та/чи умови закріплення тіла) [1]. Для їх відновлення використовують додаткову інформацію, одним із способів отримання якої є акустичні методи. В основу практичного використання акустичних методів для визначення напружено-деформованого стану твердих тіл покладено явище акустопружності, що полягає в існуванні прямого фізичного зв'язку параметрів акустичних полів із пружними властивостями твердого тіла.

У найбільш завершеному вигляді неруйнівний акустичний метод визначення поля деформацій у твердих тілах реалізовано для випадку однорідного початкового напружено-деформованого стану. У цьому разі математичну модель зводять до добре вивченої раніше задачі про поширення монохроматичних плоских хвиль у безмежному акустично однорідному анізотропному просторі, де анізотропія породжена початковим напружено-деформованим станом. Її розв'язування дозволило отримати так звані співвідношення акустопружності, що пов'язують фазову швидкість плоскої монохроматичної хвилі, яка поширюється у пружному однорідно деформованому просторі, з компонентами тензорів початкових деформацій або напружень [2].

Оскільки на практиці маємо справу з неоднорідними середовищами, то в останні роки інтенсивно розвиваються методи нелінійної акустичної діагностики, оскільки нелінійні акустичні властивості чутливіші до наявності дефектів, зміни структури середовища, ніж лінійні. Проте на даний момент проблема взаємодії пружних хвиль із неоднорідно деформованими твердими тілами вирішена лише для деяких конкретних задач.

Таким чином, створення математичних моделей, що описують процеси поширення пружних збурень у твердих тілах, які перебувають у неоднорідному напружено-деформованому стані, та встановлення зв'язку між параметрами зондувального хвильового поля й компонентами тензорів напружень чи деформацій твердого тіла вздовж шляху поширення зондувального імпульсу є важливою математичною проблемою, що продиктована практичними потребами.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Останнім часом як у вітчизняній, так і зарубіжній літературі зростає інтерес до проблем поширення пружних хвиль у твердих тілах із початковими деформаціями [3–11].

У статті [3] із застосуванням отриманої раніше лінеаризованої математичної моделі поширення малого пружного збурення в неоднорідно деформованому континуумі за умови слабкості акустичних неоднорідності й анізотропії, індукованих деформацією, було розвинено теорію інтегральної акустопружності для тривимірного напружено-деформованого стану та сформульовано задачі томографії напружень у твердих тілах. Вплив початкових деформацій на процеси поширення хвиль в анізотропному пружному просторі досліджено у роботі [4]. У статті [5] наведено математичну модель для опису поширення горизонтально поляризованої Sh-хвилі у багатошаровій плиті. Для випадків одного і двох шарів отримані аналітичні подання для групової та фазової швидкостей. Проблемі використання акустичних хвиль для сейсмічної розвідки присвячено роботи [6,7]. Зокрема у [6] запропоновано методику визначення часу проходження пружних збурень у земній корі без урахування процесів

затухання та на прикладах продемонстровано її ефективність. Модель поширення хвиль в анізотропних лінійних в'язко-пружних середовищах описано у [7]. Вплив початкових деформацій на параметри хвильового поля досліджено у роботах [8–10].

Зокрема у роботі [11] автори отримали співвідношення акустопружності для твердого тіла, що перебуває в стані плоскої деформації. Розглядалося поширення зондувального імпульсу перпендикулярно до площини плоскої симетрії та у площині дії напружень. У першому випадку отриманий розв'язок задавався двома взаємозв'язаними поперечними хвилями та незалежною поздовжньою. У другому випадку квазіпоздовжня  $L$ -хвиля була пов'язана із квазіпоздовжньою  $S_v$ -хвилею, а інша  $Sh$ -хвиля – незалежна. У середньоінтегральному наближенні було записано співвідношення акустопружності, які встановлюють зв'язок фазових швидкостей для хвиль різної поляризації із усередненими на напрямку поширення збурення значеннями компонент плоскої деформації.

Проте на даний час нема загального підходу отримання співвідношень, які пов'язують параметри зондувального імпульсу з існуючим полем деформацій у твердому тривимірному континуумі.

**Мета роботи.** Для середньоінтегрального наближення тривимірного неоднорідного поля початкових деформацій у рамках розробленої раніше математичної моделі динаміки малих пружних збурень побудувати аналітичні вирази для фазових швидкостей трьох хвиль різних поляризацій як функцій середньоінтегральних значень компонент тензора деформацій уздовж шляху поширення збурення.

**Модель динаміки пружних збурень у тривимірному просторі.** Розглядається ізотропний пружний континуум, у однозв'язній замкненій області  $V$  якого локалізоване поле неоднорідних пружних деформацій  $\varepsilon(x)$ . Поширення плоскої хвилі, що прийшла із безмежності в напрямку  $n$ , описує задача Коші для лінійної системи диференціальних рівнянь гіперболічного типу [11]

$$\rho^2 w / t^2 = \operatorname{div}((C + \Gamma \varepsilon(x)) \times \operatorname{grad} w), \quad (1)$$

із початковими умовами вигляду

$$w(x, t)|_{t=0} = \mathcal{G}(n \cdot x), \quad \partial w(x, t) / \partial t|_{t=0} = \psi(n \cdot x), \quad (2)$$

де  $w(t, x)$  — вектор переміщення збурення;  $C$  та  $\Gamma$  – тензори пружних модулів другого та третього порядків відповідно;  $\mathcal{G}(x)$  та  $\psi(x)$  достатню кількість разів неперервно-диференційовані функції,  $x = n \cdot x$ .

Компоненти вектора  $n$  наведемо у вигляді

$$n_1 = \sin \varphi \cdot \cos \theta, \quad n_2 = \sin \varphi \cdot \sin \theta, \quad n_3 = \cos \varphi.$$

Рівняння (1) перепишемо у новій системі координат  $\{x, y, z\}$ , у якій вісь  $Ox$  співпадає із напрямком поширення хвилі  $n$ , а початок координат знаходиться у точці входження променя в об'єкт. У результаті отримаємо

$$\rho \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = n_j n_l \frac{\partial}{\partial x} \left( (c_{ijkl} + \Gamma_{ijklmn} \varepsilon_{mn}) \frac{\partial w_k}{\partial x} \right) + P_{ik} w_k. \quad (3)$$

Тут диференціальний оператор  $P_{ik}$  має вигляд

$$P_{ik} = \left( D_j + n_j \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( (c_{ijkl} + \Gamma_{ijklmn} \varepsilon_{mn}) D_l \right); \quad D_l = a_{2l} \frac{\partial}{\partial y} + a_{3l} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Оскільки поле початкових деформацій локалізоване у деякій обмеженій області  $V$ , лінійний розмір якої у напрямку  $n$  дорівнює  $L_n > 0$ , введемо середньоінтегральні значення компонент початкової деформації на відрізку  $L_n$  для деякої точки входження променя зондування у тіло  $x^{in} = (x_1^{in}, x_2^{in}, x_3^{in})$

$$\bar{\varepsilon}(x^{in}) = \frac{1}{L_n(x^{in})} \int_0^{L_n(x^{in})} \varepsilon(x^{in} + sn) ds, \quad \text{або} \quad \bar{\varepsilon} = \frac{1}{L_n} \int_0^{L_n} \varepsilon(x, 0, 0) dx \quad (4)$$

і відхилення компонент початкової деформації від їх середньоінтегральних значень на цьому відрізку

$$e(x, y, z) = \varepsilon(x, y, z) - \bar{\varepsilon}. \quad (5)$$

Із використанням останніх позначень перепишемо рівняння (3) таким чином:

$$\rho \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = (c_{ijkl} + \Gamma_{ijklmn} \bar{\varepsilon}_{mn}) n_l n_j \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} + n_l n_j \Gamma_{ijklmn} \frac{\partial}{\partial x} \left( e_{mn} \frac{\partial w_k}{\partial x} \right) + P_{ik} w_k. \quad (6)$$

До системи рівнянь (6), (2) застосуємо ітераційний метод [11], який зводить її до розв'язування певної послідовності гіперболічних задач Коші зі сталими коефіцієнтами у вигляді

$$\rho \frac{\partial^2 w_i^{(p+1)}}{\partial t^2} = (c_{ijkl} + \Gamma_{ijklmn} \bar{\varepsilon}_{mn}) n_l n_j \frac{\partial^2 w_k^{(p+1)}}{\partial x^2} + n_l n_j \Gamma_{ijklmn} \frac{\partial}{\partial x} \left( e_{mn} \frac{\partial w_k^{(p)}}{\partial x} \right) + P_{ik} w_k^{(p)}. \quad (7)$$

Зокрема, за нульове наближення беремо розв'язок задачі для рівняння

$$\rho \partial^2 w^{(0)} / \partial t^2 = B \cdot \nabla^2 w^{(0)}, \quad (8)$$

що точно задовольняє початковим умовам (2). У формулі (8)  $B$  – акустичний тензор, компоненти якого  $B_{ik} = (c_{ijkl} + \Gamma_{ijklmn} \bar{\varepsilon}_{mn}) n_j n_l$  є функціями середньоінтегральних у напрямку  $n$  значень компонент початкової деформації  $\bar{\varepsilon}_{mn}$ .

Задача (8), (2) допускає розв'язки вигляду

$$w^{(0)}(x, t) = W \exp(iK(x - Ct)). \quad (9)$$

Амплітуди  $W$  знаходимо із початкових умов (2). А підставляючи (9) у систему рівнянь (8), доходимо до наступної задачі на власні значення для визначення фазових швидкостей квазіпоздовжньої  $C_{(l)}$  та двох казіпоперечних  $C_{(Sh)}$  і  $C_{(Sv)}$  хвиль і векторів, що визначають їх поляризацію

$$(B_{ik} - \delta_{ik} \rho C^2) W_k = 0. \quad (10)$$

Враховуючи еліптичність акустичного тензора  $B$  [11], отримано подання для квазіпоzdовжньої  $C_{(l)}$  та двох казіпоперечних  $C_{(sh)}$  і  $C_{(sv)}$  фазових швидкостей власних хвиль у вигляді

$$\rho C_{(l)}^2 = \frac{B_1 + P \cos(\alpha/3)}{3}; \quad \rho C_{(sh),(sv)}^2 = \frac{B_1 - P \cos((\alpha \pm \pi)/3)}{3}, \quad (11)$$

де

$$P = \sqrt{2(3I_1(B^2) - B_l^2)} > 0, \quad \cos \alpha = \frac{\pm \sqrt{2} (2(B_l)^3 + 9I_1(B^3) - 9B_l I_1(B^2))}{(3I_1(B^2) - B_l^2)^{3/2}},$$

де  $B_l = I_1(B)$ ,  $I_1(\dots)$  – перші інваріанти відповідних тензорів.

Таким чином, для тривимірного напружено-деформованого стану загального вигляду отримано інтегральні співвідношення акустопружності (11), які виражають фазові швидкості  $C_{(l)}$ ,  $C_{(sh)}$  та  $C_{(sv)}$  через лінійні інтеграли  $\bar{\varepsilon}_{mn}$  від компонент початкової деформації  $\varepsilon_{mn}$  уздовж напрямку  $n$ . Тож, вимірюючи швидкості для хвиль відповідної поляризації, отримуємо три інтегральні співвідношення, що пов'язують компоненти тензора початкової деформації на напрямку зондування  $n$ .

**Результати дослідження.** Отримані подання для фазових швидкостей різної поляризації було використано для дослідження впливу наявності початкового напружено-деформованого стану на їхні значення порівняно з аналогічними величинами за відсутності поля деформацій у тілі.

Для прикладу розглядалося поширення плоскої хвилі у безмежному просторі, початковий напружено-деформований стан у якому створюють масові сили, зосереджені в деякій обмеженій області  $V$  та зникають на безмежності [12]. Нехай зосереджена сила прикладена до початку координат та спрямована по осі  $0x_3$ . Компоненти тензора початкової деформації у цьому випадку мають вигляд

$$\varepsilon_{11}(x_1, x_2, x_3) = \frac{Ax_3}{R^3(x_1, x_2, x_3)} \left( 1 - \frac{3x_1^2}{R^2(x_1, x_2, x_3)} \right), \quad \varepsilon_{12}(x_1, x_2, x_3) = \frac{-3Ax_1x_2x_3}{R^5(x_1, x_2, x_3)},$$

$$\varepsilon_{22}(x_1, x_2, x_3) = \frac{Ax_3}{R^3(x_1, x_2, x_3)} \left( 1 - \frac{3x_2^2}{R^2(x_1, x_2, x_3)} \right),$$

$$\varepsilon_{33}(x_1, x_2, x_3) = \frac{Ax_3}{R^3(x_1, x_2, x_3)} \left( \frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu} - \frac{3x_3^2}{R^2(x_1, x_2, x_3)} \right),$$

$$\varepsilon_{13}(x_1, x_2, x_3) = \frac{Ax_1}{R^3(x_1, x_2, x_3)} \left( \frac{\mu}{\lambda + \mu} - \frac{3x_3^2}{R^2(x_1, x_2, x_3)} \right),$$

$$\varepsilon_{23}(x_1, x_2, x_3) = \frac{Ax_2}{R^3(x_1, x_2, x_3)} \left( \frac{\mu}{\lambda + \mu} - \frac{3x_3^2}{R^2(x_1, x_2, x_3)} \right). \quad (12)$$

У формулах введено позначення

$$A = \frac{\delta(\lambda + \mu)}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)}, \quad R(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

$\delta$  – деяка постійна.

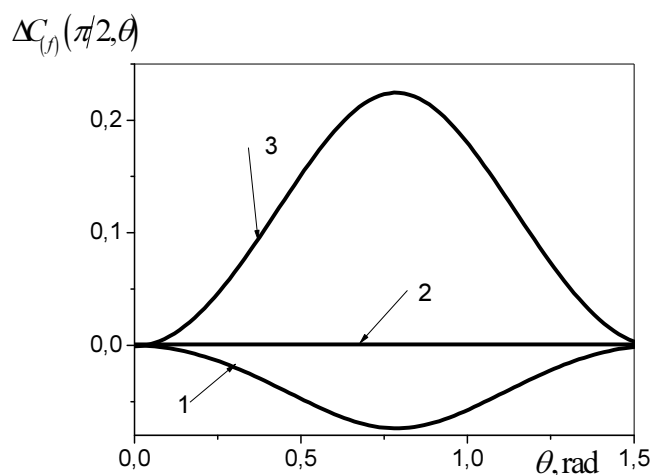
Якщо у безмежному просторі вирізати кулю, то вона також буде знаходитись у стані рівноваги, а компоненти тензора початкової деформації також матимуть вигляд (12). Радіус кулі з центром у початку координат виберемо таким чином, щоб  $r \leq \max |p_i(x_1, x_2, x_3)| / \sqrt{e}$ , де  $p_i(x_1, x_2, x_3)$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) – компоненти вектора напружень  $e \approx 2.71828$  – число Ейлера.

Знайшовши за формулою (4) усереднені значення компонент (12) на шляху перетину зондувального променя зі сферою, визначимо значення фазових швидкостей для квазіпоздовжньої та двох квазіпоперечних швидкостей за формулами (11). Отримані фазові швидкості залежать від точки входження хвилі у тіло та двох кутів ( $\varphi, \theta$ ), що визначають напрям її поширення. Розрахунки проведено для сплаву 1915.

На графіках 1, 2 для фіксованої точки входження зондувального збурення у досліджуваній об'єкт ( $x_1 = 0.1r$ ,  $x_2 = 0.25r$ ) показано залежності відносних змін трьох фазових швидкостей від двох кутів, що визначають напрям поширення зондувального променя у просторі, порівняно із фазовими швидкостями у ненапруженому середовищі  $\Delta C_{(f)}(\varphi, \theta) = (C_{(f)}(\varphi, \theta) - C_{(f)}) / C_{(f)}$ , де ( $f = L, Sv, Sh$ ). На рис.1, 2, що цифрою 1 позначено функцію зміни фазових швидкостей для квазіпоздовжньої хвилі  $L$ , цифрою 2 – для квазіпоперечної  $Sv$ -хвилі, а цифрою 3 – для  $Sh$ -хвилі.

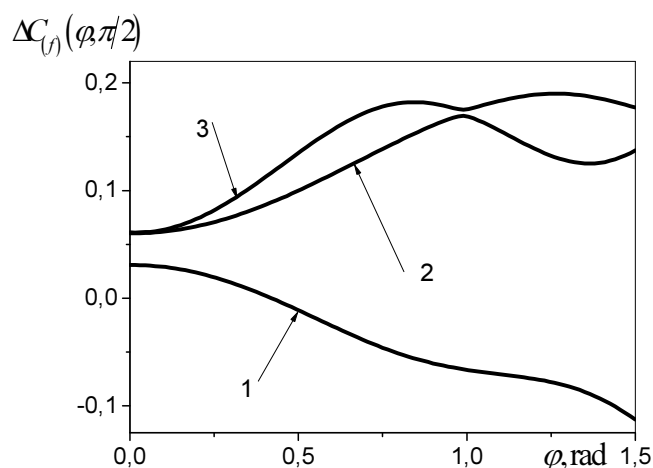
Зокрема, на рис.1 зображено графіки для випадку, коли зондувальний імпульс поширюється у площині  $x_1 0x_2$ . Тоді напрям поляризації  $Sh$ -хвилі паралельний осі  $0x_3$ , де поле напружень є найбільшим, що у свою чергу призводить до найсуттєвішої зміни фазової швидкості  $Sh$ -хвилі. У той же час  $Sv$ -хвиля, що поширюється у площині  $x_1 0x_2$ , змінюється мало. На рис.2 проілюстровано графіки залежностей відносних похибок фазових швидкостей за умови, що хвиля поширюється у площині  $x_2 0x_3$ . У цьому випадку фазові швидкості обох поперечних хвиль змінюються майже однаково.

Таким чином, отримані числові результати дають можливість визначити напрямки, вздовж яких поле початкових деформацій у тілі змінюється найбільше.



**Рисунок 1.** Залежність відносних похибок фазових швидкостей від кута падіння у площині  $x_1 0x_2$

**Figure 1.** Dependence of the relative errors of the phase velocity on the angle of incidence in the plane  $x_1 0x_2$



**Рисунок 2.** Залежність відносних похибок фазових швидкостей від кута падіння у площині  $x_2 0x_3$

**Figure 2.** Dependence of the relative errors on the phase velocity of the angle of incidence in the plane  $x_2 0x_3$

**Висновки.** Розроблені раніше математичну модель динаміки малих пружних збурень у неоднорідно-деформованому твердому тілі та ітераційну процедуру для її розв'язування використано у задачі про поширення плоскої хвилі у тривимірному полі початкових деформацій. У нульовому наближенні ітераційного методу отримано акустичні співвідношення, які пов'язують усереднені вздовж напрямку поширення збурення фазові швидкості для трьох хвиль різної поляризації з середньоінтегральними значеннями компонент тензора початкової деформації. Проведено числове тестування отриманих результатів для простору, початковий деформований стан якого зумовлений зосередженою у центрі силою в напрямку осі аплікату. Отримані аналітичні та числові результати показали вплив параметрів початкового НДС у середньоінтегральному вздовж напрямку поширення зондувального збурення наближенні ітераційної процедури на характеристики зондувального імпульсу. На їх основі можна робити висновки щодо наявності та розташування області дії напружень у досліджуваному об'єкті.

Вимірюючи фазові швидкості для скінченної кількості напрямів зондування, отримуємо сукупність інтегральних співвідношень стосовно компонент початкової деформації, які можна використовувати для формулювання задач акустичної томографії початкового напружено-деформованого стану.

**Conclusions.** The developed earlier mathematical model of dynamics of small elastic disturbances in non-uniformly deformed solid body and iterative procedure for its solution in the problem on the plane wave propagation in 3-D field of initial deformations are used. In zero approximation of iteration method the acoustic relations are obtained, which connect the phase velocities are ranged along the direction of perturbation propagation for three waves of different polarization with mean-integral values of the component of 3 initial deformations. The numerical testing of the results are obtained is carried out the space, the initial strain state which is caused by the centrally concentrated force in the direction of applicant axis. The obtained analytic and numerical results the influences of parameters of initial stress-strain state in mean-integral along the directions of propagation of sounding perturbation approximation of iteration procedure on the characteristics of sounding pulse are showed. On their basis are can draw a conclusions as to the presence and location of the region of stresses action in the object studied.

When measuring the phase velocities for a finite number of sounding directions we obtain the totality of integral relations with the components of initial deformation, which can be used to formulate the problems of acoustic tomography of initial stress-strain state.

#### Список використаної літератури

1. Методы акустического контроля металлов [Текст] / Н. П. Алешин, В. Е. Белый, А. Х. Вopilкин и др. – М. : Машиностроение, 1989. – 456 с.
2. Гузь, А. Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями [Текст] / А. Н. Гузь. – Киев: А. С. К., 2004. – 672 с.
3. Chekurin, V. Theory of integrated acoustoelasticity for 3-D stress-strained state [Text] / V. Chekurin // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2010. – №12. – С. 179–188.
4. Sharma, M. D. Effect of initial stress on reflection at the free surface of anisotropic elastic medium [Text] / M. D. Sharma // J. of Earth System Science. – 2007. – Vol. 116, №6. – P537–551.
5. Maigrea, I. -D. \_Velocities, dispersion and energy of SH-waves in anisotropic laminated plates [Text] / I. -D. Maigrea and S. V. Kuznetsov // Acoustical Physics. – 2014. – Vol. 60, №. 2. – P. 200–205.
6. Zhu, T. Time-reverse modeling of acoustic wave propagation in attenuating media [Text] / T. Zhu // Geophysical Journal International. – 2014. – №3. – P. 1787–1795.
7. Carcione, J. M. Wave propagation in anisotropic linear viscoelastic media: theory and simulated wave fields [Text] / J. M. Carcione // Geophysical Journal International. – 2007. – №4. – P. 739–750.
8. Sharma, M. D. Wave propagation in the priestesses anisotropic generalized thermoelastic medium, Earth Planets Space [Text] / M. D. Sharma // J. of Earth System Science. – 2010. – Vol. 62. – P. 381–390.
9. Lys, E. V. Interaction of seismic waves with zones of concentration of initial stresses [Text] / E. V. Lys, E. I. Romenski, V. A Cheverda., M. I. Eпов // Doklady Earth Sciences. – 2013. – №2. – P. 402–405.
10. Sharafutdinov, V. Tomography of small residual stresses [Text] / V. Sharafutdinov, J. Wang // Inverse problems. – 2012. – Vol. 28, №10. – P. 551–590.
11. Чекурін, В. Ф. Пружні збурення в неоднорідно деформованих твердих тілах [Текст] / В. Ф. Чекурін, О. З. Кравчишин. – Львів: СПОЛОМ, 2008. – 152 с.
12. Новацкий, В. Теория упругости [Текст] / В. Новацкий. – М. : Мир, 1975. – 872 с.

*Отримано 24.04.2015*