

УДК 539.377

**Б. Хапко, канд. фіз.-мат. наук; Р. Мартиняк, докт. фіз.-мат. наук**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

## **МОДЕЛЮВАННЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ЧАСТКОВО ВІДШАРОВАНОМУ ТЕРМОБАР'ЄРНОМУ ПОКРИТТІ**

***Резюме.** Досліджено температуру термобар'єрного покриття, спричинену різницею температур основи та довкілля за теплообміну з довкіллям на лицевій поверхні покриття та недосконалому тепловому контакту на інтерфейсі покриття-основа, що характеризується локальним підвищенням термоопору на ділянці міжфазного розшарування. Запропоновано спосіб зведення крайової задачі теплопровідності для покриття до системи інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду відносно функцій, що є лінійними комбінаціями інтегральних характеристик температури покриття (середньої температури і температурного моменту). Побудовано числову схему розв'язування інтегральних рівнянь з використанням методу квадратурних формул. Наведено результати числового аналізу розподілу інтегральних характеристик температури в покритті – середньої температури та температурного моменту.*

***Ключові слова:** термобар'єрне покриття, відшарування, температура, термоопір, коефіцієнти тепловіддачі, інтегральні рівняння Фредгольма другого роду.*

**B. Khapko, R. Martynyak**

## **SIMULATION OF TEMPERATURE FIELD IN A PARTIALLY DELAMINATED THERMAL BARRIER COATING**

***Summary.** The problem of determining temperature in a thin partially delaminated thermal barrier coating is considered taking into account the convective heat exchange with the surrounding environment at the front and end surfaces of the coating and the imperfect thermal contact with the base, which is modeled by thermal resistance. In view of deterioration of heat exchange between the base and the coating in the separation region, thermal resistance in this region is assumed to be greater than thermal resistance in the regions of full adhesion. The heat-transfer coefficient at the front surface of the coating is coordinate-dependent. With the use of the propositions of heat conduction in thin elements of constructions, a model for describing temperature field in a partially delaminated coating, caused by the difference between the temperatures of the base and the surrounding environment, is proposed. Utilizing the method of variation of constants, an approach for reducing the heat conduction boundary value problem for the coating to a system of Fredholm integral equations of the second kind for the functions that are linear combinations of the integral characteristics of the coating temperature (the mean temperature and the temperature moment) and the temperature of the surrounding environment and the base is developed. A numerical scheme for solving the system of integral equations is constructed using the quadrature method. In particular, Simpson's quadrature formulae are utilized to evaluate the integrals, and the system of Fredholm integral equations of the second kind is reduced to a system of linear algebraic equations. The results of numerical analysis of temperature distribution at the front surface of the coating and at the interface between the coating and the base are given for the case of thermal insulation of the end surfaces and the case of convective heat exchange with the surrounding environment at them. The distributions of the mean temperature and the temperature moment are examined for various values of thermal resistance in the separation region. It is revealed that an increase in thermal resistance leads to a significant temperature perturbation at the front surface as well as at the interface between the coating and the base. However, the value of the temperature moment in the separation zone is slightly decreasing in comparison with the case when the delamination does not occur at the interface between the coating and the base.*

**Key words:** thermal barrier coating, delamination, temperature, thermal resistance, heat-transfer coefficients, Fredholm integral equations of the second kind.

**Постановка проблеми.** Сучасні елементи конструкцій розглядаються як багаторівнева система, в якій поверхневі шари й основа є самостійними підсистемами. Тонкі поверхневі шари (термобар'єрні покриття), особливо у деталях, що використовуються в ракетно-космічній галузі, забезпечують захист основи від дії високої температури, володіють високою адгезією, жароміцністю і жаростійкістю. Відшарування теплозахисних покриттів від основи за дії інтенсивного довільно розподіленого за координатами теплового навантаження відбувається внаслідок втрати стійкості, зумовленої складним температурним полем, яке виникає із-за недосконалого теплового контакту спряжених матеріалів. Тому роль поверхневого шару як самостійної підсистеми виявляється принципово важливою в теоретичних дослідженнях деформування твердих тіл при термомеханічних навантаженнях.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Моделювання температурного поля термобар'єрного покриття з урахуванням змінності коефіцієнтів тепловіддачі на лицевій поверхні та недосконалого теплового контакту на межі покриття-основа призводить до задач, що містять систему диференціальних рівнянь теплопровідності в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами, розв'язання якої пов'язане зі значними математичними труднощами. У літературі відомі теоретичні дослідження термонапружень у пластинках зі змінними коефіцієнтами тепловіддачі [1–5] різними методами, зокрема запропонованими у [6–10]. Втрата стійкості відшарованого від основи покриття внаслідок наявності у ньому власних деформацій стиску, викликаних нагрівом, розглянута у роботі [11]. В роботах [12,13] проведено комп'ютерне моделювання деформаційної поведінки термобар'єрних покриттів, а також показано вплив властивостей проміжкового шару між покриттям та основою на значення екстремальних напружень за інтенсивного теплового потоку на його лицевій поверхні.

Температурні поля й напруження в біматеріальних тілах з міжфазними тріщинами, що мають змінний термоопір, вивчено в працях [14–17].

**Мета роботи.** При потужному нагріві на поверхнях покриття виникають великі перепади температур, внаслідок чого в ньому з'являються значні згинальні моменти, які можуть прискорити гофрування покриття. В зоні відшарування відбувається різке погіршення теплообміну між покриттям і основою, оскільки тут їх поверхні стають частково або повністю теплоізованими. В результаті відшарування приводить до збурення температурного поля. Тому для опису закономірностей температурної поведінки термобар'єрних покриттів із використанням положень теорії теплопровідності тонких елементів конструкцій та з урахуванням недосконалого теплового контакту з основою й залежності від координати коефіцієнтів тепловіддачі з лицевої поверхні, запропоновано спосіб зведення задачі теплопровідності до системи інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду.

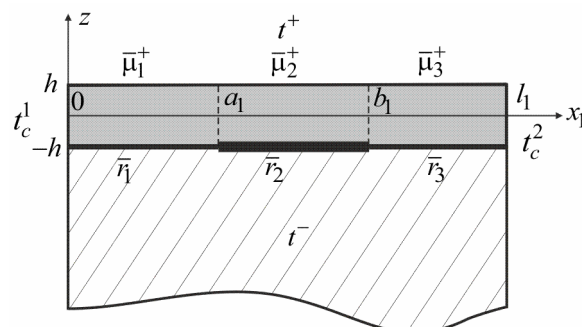


Рисунок 1. Розрахункова схема задачі

Figure 1. The design model of the problem

**Формулювання задачі теплопровідності.** Дослідимо температурне поле у тонкому термобар'єрному покритті завдовжки  $l_1$  і завтовшки  $2h$ , на верхній (лицевій) поверхні  $z = h$  якого відбувається теплообмін за законом Ньютона з довкіллям температури  $t^+$ , а на нижній поверхні  $z = -h$  – неідеальний тепловий контакт з основою температури  $t^-$ . Неідеальність контакту покриття з основою може бути зумовлена наявністю мікропор, міжфазного прошарку чи інших міжфазних недосконалостей, інтегральний вплив яких згідно з теорією контактного теплообміну [18] враховуватимемо контактним термоопором  $\bar{r}$ . На деякій серединній ділянці  $[a_1, b_1)$  (рис.1) міжфазної поверхні порушена адгезія покриття з основою і відбувається його локальне відшарування. Погіршення теплообміну між основою і покриттям унаслідок відшарування зумовлює підвищення термоопору до величини  $\bar{r}_2$  на ділянці  $[a_1, b_1)$  в порівнянні з термооперами  $\bar{r}_1$  і  $\bar{r}_3$  на ділянках повної адгезії  $(0, a_1)$  та  $[b_1, l_1)$  відповідно (тобто  $\bar{r}_2 > \bar{r}_1$  і  $\bar{r}_2 > \bar{r}_3$ ). Вважаємо, що коефіцієнти тепловіддачі на лицевій поверхні покриття  $z = h$  на ділянках  $(0, a_1)$ ,  $[a_1, b_1)$ ,  $[b_1, l_1)$  теж різні й дорівнюють  $\bar{\mu}_1^+$ ,  $\bar{\mu}_2^+$ ,  $\bar{\mu}_3^+$  відповідно. На торцевих поверхнях покриття  $x_1 = 0$  та  $x_1 = l_1$  відбувається теплообмін за законом Ньютона з зовнішнім середовищем температури  $t_c^1$  і  $t_c^2$  та коефіцієнтами тепловіддачі  $\bar{\xi}_1^1$ ,  $\bar{\xi}_2^1$  відповідно.

Щоб описати кусково-сталі коефіцієнти тепловіддачі та термоопір на ділянках  $(0, a_1)$ ,  $[a_1, b_1)$ ,  $[b_1, l_1)$ , скористаємося асиметричною функцією Гевісайда

$$S_-(x_1 - a_1) = \begin{cases} 1, & x_1 \geq a_1, \\ 0, & x_1 < a_1 \end{cases} \quad [1]. \text{ Тоді}$$

$$\begin{aligned} \{\bar{\mu}^+(x_1), \bar{r}(x_1)\} &= \{\bar{\mu}_1^+, \bar{r}_1\} + \left( \{\bar{\mu}_2^+, \bar{r}_2\} - \{\bar{\mu}_1^+, \bar{r}_1\} \right) S_-(x_1 - a_1) + \\ &+ \left( \{\bar{\mu}_3^+, \bar{r}_3\} - \{\bar{\mu}_2^+, \bar{r}_2\} \right) S_-(x_1 - b_1), \end{aligned} \quad (1)$$

Згідно з гіпотезою про лінійний за товщиною покриття розподіл температури

$$t(z, x_1) = T_1(x_1) + \frac{z}{h} T_2(x_1) \quad (2)$$

стаціонарне температурне поле в ньому виражається через інтегральні температурні характеристики – середню температуру  $T_1(x_1) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h t(x_1, z) dz$  і температурний

момент  $T_2(x_1) = \frac{3}{2h^2} \int_{-h}^h z t(x_1, z) dz$ . Інтегральні температурні характеристики

$T_1(x_1)$ ,  $T_2(x_1)$  визначаються з системи диференціальних рівнянь [19, 20]

$$\left\{ \begin{array}{l} h^2 \frac{d^2 T_1(x_1)}{dx_1^2} - \mu_1(x_1)(T_1(x_1) - t_1) - \mu_2(x_1)(T_2(x_1) - t_2) = 0, \\ h^2 \frac{d^2 T_2(x_1)}{dx_1^2} - 3(1 + \mu_1(x_1))(T_2(x_1) - t_2) - 3\mu_2(x_1)(T_1(x_1) - t_1) = 3t_2, \end{array} \right. \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

за крайових умов

$$\frac{dT_i}{dx_1} - \xi_1^1 (T_i - T_{i1}^c) = 0 \text{ при } x = 0, \quad \frac{dT_i}{dx_1} - \xi_2^1 (T_i - T_{i2}^c) = 0 \text{ при } x = l_1, \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

Тут  $T_{i1}^c = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h t_c^i dz$ ,  $T_{i2}^c = \frac{3}{2h^2} \int_{-h}^h z t_c^i dz$ ,  $t_{1,2} = \frac{t^+ \pm t^-}{2}$ ,  $\mu_{1,2}(x_1) = \mu^+(x_1) \pm r^{-1}(x_1)$ ;  
 $\mu^+(x_1) = \frac{h\bar{\mu}^+(x_1)}{2\lambda}$ ,  $r(x_1) = \frac{2\lambda\bar{r}(x_1)}{h}$  – безрозмірні коефіцієнт тепловіддачі на лицевій поверхні покриття  $z = h$  та термоопір на межі контакту покриття з основою  $z = -h$ , відповідно;  $\xi_1^1 = \frac{h\bar{\xi}_1^1}{\lambda}$ ,  $\xi_2^1 = \frac{h\bar{\xi}_2^1}{\lambda}$  – безрозмірні коефіцієнти тепловіддачі на торцях  $x_1 = 0$  та  $x_1 = l_1$  відповідно.

**Методика зведення задачі теплопровідності до системи інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду.**

Ввівши безрозмірну координату  $x = x_1 / h$  і заміни

$$F_1 = T_1 + \lambda_1 T_2 - (t_1 + \lambda_1 t_2), \quad \lambda_2 F_2 = T_1 + \lambda_2 T_2 - (t_1 + \lambda_2 t_2) \quad (5)$$

та врахувавши подання (1), систему диференціальних рівнянь (3) і крайові умови (4) зведемо до такої крайової задачі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta F_1(x) - \alpha_1^2 F_1(x) = Q_1(x) S_-(x-a) + Q_2(x) S_-(x-b) + 3\lambda_1 t_2, \\ \Delta F_2(x) - \alpha_2^2 F_2(x) = Q_3(x) S_-(x-a) + Q_4(x) S_-(x-b) + 3t_2, \end{array} \right. \quad 0 < x < l, \quad (6)$$

$$\frac{dF_i}{dx} - \xi_1 (F_i - F_{i1}^c) = 0 \text{ при } x = 0, \quad \frac{dF_i}{dx} + \xi_2 (F_i - F_{i2}^c) = 0 \text{ при } x = l, \quad (7)$$

де

$$Q_{\{1,2\}}(x) = \{d_1, \delta_1\} F_1(x) + \{d_2, \delta_2\} F_2(x), \quad Q_{\{3,4\}}(x) = \{d_3, \delta_3\} F_1(x) + \{d_4, \delta_4\} F_2(x),$$

$$\{d_1, \delta_1\} = \left[ \left( \eta_{\{2,3\}}^+ - \eta_{\{1,2\}}^+ \right) (\lambda_2 - 3\lambda_1) - 2 \left( \eta_{\{2,3\}}^- - \eta_{\{1,2\}}^- \right) \right] / (\lambda_2 - \lambda_1),$$

$$\{d_2, \delta_2\} = \left[ -2 \left( \eta_{\{2,3\}}^+ - \eta_{\{1,2\}}^+ \right) / 3 + \left( \eta_{\{2,3\}}^- - \eta_{\{1,2\}}^- \right) (\lambda_2 + \lambda_1) \right] / (\lambda_2 - \lambda_1),$$

$$\{d_3, \delta_3\} = \left[ -2(\eta_{\{2,3\}}^+ - \eta_{\{1,2\}}^+) \lambda_2 + (\eta_{\{2,3\}}^- - \eta_{\{1,2\}}^-) (3\lambda_2^2 - 1) \right] / [\lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)],$$

$$\{d_4, \delta_4\} = \left[ (\eta_{\{2,3\}}^+ - \eta_{\{1,2\}}^+) (-\lambda_1 + 3\lambda_2) + 2(\eta_{\{2,3\}}^- - \eta_{\{1,2\}}^-) \right] / (\lambda_2 - \lambda_1),$$

$$\lambda_{1,2} = \left[ 3 + 2\eta_1^+ \pm \sqrt{(3 + 2\eta_1^+)^2 + 12(\eta_1^-)^2} \right] / (6\eta_1^-), \quad \alpha_i^2 = \eta_1^+ + 3\lambda_i \eta_1^-, \quad i = 1, 2;$$

$$F_{1i}^c = T_{1i}^c - t_1 + \lambda_1 (T_{2i}^c - t_2), \quad F_{2i}^c = T_{2i}^c - t_2 + (T_{1i}^c - t_1) / \lambda_2, \quad l = l_1 / h, \quad \xi_i = \xi_i^1 / h, \quad a = a_1 / h,$$

$$b = b_1 / h, \quad \mu_{1,2}^\pm(x) = \eta_1^\pm + (\eta_2^\pm - \eta_1^\pm) S_-(x-a) + (\eta_3^\pm - \eta_2^\pm) S_-(x-b),$$

$$\eta_m^\pm = \mu_m^+ \pm r_m^{-1}, \quad (m = 1, 2, 3); \quad \mu_m^+ = \frac{h\bar{\mu}_m^+}{2\lambda}, \quad r_m = \frac{2\lambda\bar{r}_m}{h} \quad (m = 1, 2, 3) - \text{безрозмірні коефіцієнти}$$

тепловіддачі й термоопір на ділянках  $(0, a_1)$ ,  $[a_1, b_1)$ ,  $[b_1, l_1)$  відповідно.

У праві частини рівнянь системи (6) входять шукані функції  $F_1(x)$  і  $F_2(x)$ , визначені на відрізках  $[a, l)$  та  $[b, l)$ . Розв'язуємо кожне з цих рівнянь методом варіації сталої [5], вважаючи їх праві частини відомими. Задовольнивши крайові умови (7), визначимо сталі інтегрування, підставляючи які у знайдений загальний розв'язок отримаємо для визначення функцій  $F_1(x)$  та  $F_2(x)$  систему лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1(x) + \int_a^l [d_1 F_1(s) + d_2 F_2(s)] K_1(x, s) ds + \\ \int_b^l [\delta_1 F_1(s) + \delta_2 F_2(s)] K_1(x, s) ds = f_1(x), \\ F_2(x) + \int_a^l [d_3 F_1(s) + d_4 F_2(s)] K_2(x, s) ds + \\ \int_b^l [\delta_3 F_1(s) + \delta_4 F_2(s)] K_2(x, s) ds = f_2(x), \end{array} \right. \quad 0 \leq x \leq l, \quad (8)$$

$$\text{де } K_i(x, s) = \frac{p_{2i} e^{-\alpha_i x} + e^{\alpha_i x}}{p_{1i}} \left[ ch \alpha_i (l-s) + \frac{\xi_2}{\alpha_i} sh \alpha_i (l-s) \right] - \frac{1}{2\alpha_i} \left( e^{\alpha_i(x-s)} - e^{-\alpha_i|x-s|} \right),$$

$$p_{1i} = -p_{2i} (\alpha_i - \xi_2) e^{-\alpha_i(l-s)} + (\alpha_i + \xi_2) e^{\alpha_i(l-s)}, \quad p_{2i} = \frac{\alpha_i - \xi_1}{\alpha_i + \xi_1},$$

$$f_i(x) = \frac{p_{2i} e^{-\alpha_i x} + e^{\alpha_i x}}{p_{1i}} \left[ \frac{3\lambda_1^{2-i} t_2}{\alpha_i} sh \alpha_i l - \frac{3\lambda_1^{2-i} t_2 \xi_2}{\alpha_i^2} (1 - ch \alpha_i l) + \xi_2 F_{i2}^c + \right. \\ \left. + \frac{b_1(\alpha_i - \xi_2) e^{-\alpha_i l}}{\alpha_i + \xi_1} F_{i1}^c \right] + \frac{\xi_1}{\alpha_i + \xi_1} F_{i1}^c, \quad i = 1, 2.$$

Схема числового розв'язування системи інтегральних рівнянь (8). Для цього, використаємо квадратурні формули Сімпсона [21]

$$\int_0^l F(s) d_1 K_1(x, s) ds = \sum_{k=1}^n A_{k,1} F(s_k) d_1 K_1(x, s_k) \quad (9)$$

Тут відрізок  $[0, l]$  ділиться на  $n-1$  рівну частину довжиною  $\xi = \frac{l}{n-1}$  точками  $s_k = (k-1)\xi$  ( $k = \overline{1, n}$ ), коефіцієнти  $A_{1,1} = A_{2\rho+1,1} = \xi/3$ ,  $A_{2\rho,1} = 4\xi/3$ ,  $A_{2\rho-1,1} = 2\xi/3$ ,  $n = 2\rho + 1$ ,  $\rho = 1, 2, 3, \dots$ . Якщо в системі інтегральних рівнянь (8) замінити усі інтеграли інтегральними сумами з (9), а після цього замість координати  $x$  підставляти точки розбиття  $s_j$ , ( $j = \overline{1, n}$ ), то отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення значень функцій  $F_1(x_j)$  та  $F_2(x_j)$  в цих точках

$$F_1(x_j) + \sum_{k=1}^n A_{k,1} F_1(s_k) d_1 K_1(x_j, s_k) + \sum_{k=1}^n A_{k,1} F_2(s_k) d_2 K_1(x_j, s_k) + \\ + \sum_{k=1}^n A_{k,2} F_1(q_k) \delta_1 K_1(x_j, s_k) + \sum_{k=1}^n A_{k,2} F_2(q_k) \delta_2 K_1(x_j, s_k) = f_1(x_j), \\ F_2(x_j) + \sum_{k=1}^n A_{k,1} F_1(s_k) d_3 K_2(x_j, s_k) + \sum_{k=1}^n A_{k,1} F_2(s_k) d_4 K_2(x_j, s_k) + \\ + \sum_{k=1}^n A_{k,2} F_1(q_k) \delta_3 K_2(x_j, s_k) + \sum_{k=1}^n A_{k,2} F_2(q_k) \delta_4 K_2(x_j, s_k) = f_2(x_j). \quad (10)$$

Перенісши у рівняннях (8) інтеграли у праву частину та врахувавши квадратурні формули (9), визначимо функції  $F_1(x)$ ,  $F_2(x)$  в будь-якій точці  $x \in [0, l]$  через їх значення (10) у точках розбиття

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= f_1(x) - \sum_{k=1}^n A_{k1} F_1(s_k) d_1 K_1(x, s_k) - \sum_{k=1}^n A_{k1} F_2(s_k) d_2 K_1(x, s_k) - \\
&\quad - \sum_{k=1}^n A_{k2} F_1(q_k) \delta_1 K_1(x, s_k) - \sum_{k=1}^n A_{k2} F_2(q_k) \delta_2 K_1(x, s_k), \\
F_2(x) &= f_2(x) - \sum_{k=1}^n A_{k1} F_1(s_k) d_3 K_2(x, s_k) - \sum_{k=1}^n A_{k1} F_2(s_k) d_4 K_2(x, s_k) - \\
&\quad - \sum_{k=1}^n A_{k2} F_1(q_k) \delta_3 K_2(x, s_k) - \sum_{k=1}^n A_{k2} F_2(q_k) \delta_4 K_2(x, s_k).
\end{aligned}$$

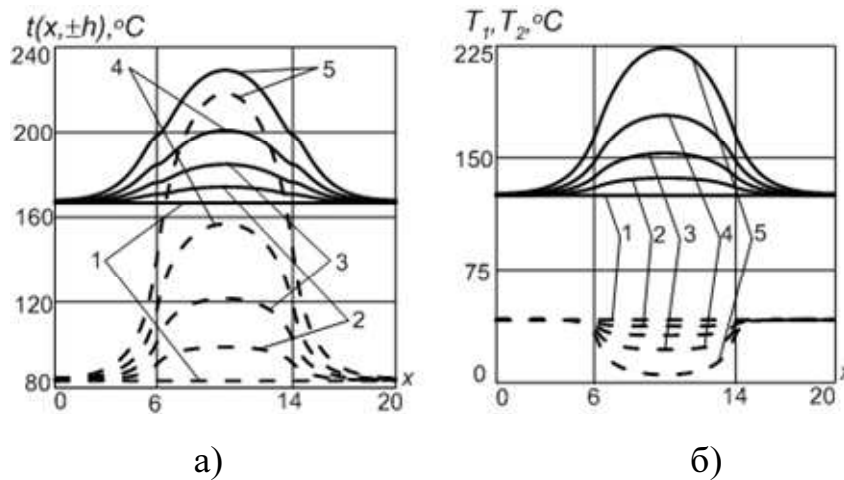
Врахувавши заміни (5), розв'язок крайової задачі (3), (4) визначаємо за формулами

$$T_1 = [\lambda_2 (F_1 - \lambda_1 F_2)] / (\lambda_2 - \lambda_1) + t_1; \quad T_2 = (\lambda_2 F_2 - F_1) / (\lambda_2 - \lambda_1) + t_2.$$

Температура в покритті виражається через температурні характеристики  $T_1(x)$ ,  $T_2(x)$  за формулою (2). На верхній і нижній поверхнях покриття вона відповідно дорівнює  $t(x, h) = T_1(x) + T_2(x)$  і  $t(x, -h) = T_1(x) - T_2(x)$ .

**Аналіз результатів розрахунків.** Розглядали тонке термобар'єрне покриття з такими безрозмірними розмірами:  $a = 6$ ,  $b = 14$ ,  $l = 20$ . Вважали, що температура середовища на лицевій поверхні покриття  $z = h$  двісті п'ятдесят градусів ( $t_c^+ = 250^\circ C$ ), а температура основи нульова ( $t_c^- = 0^\circ C$ ); коефіцієнт тепловіддачі вздовж всієї поверхні  $z = h$  сталий і дорівнює  $\mu^+(x) = 0,175$ ; термоопір на ділянках  $0 \leq x < 6$  і  $14 \leq x < 20$  поверхні  $z = -h$  однаковий і дорівнює  $r_1 = r_3 = 5,7$ . Числові розв'язки побудовано для двох різних умов на торцях покриття  $x_1 = 0$ ,  $x_1 = l$ : за теплоізоляції торців (тоді в умовах (7) кладемо  $\xi_1 = \xi_2 = 0$ ) та за конвективного теплообміну з довкіллям температури  $t_c^1 = t_c^2 = 250^\circ C$  (коефіцієнти тепловіддачі в умовах (7)  $\xi_1 = \xi_2 = 0,175$ ).

На рис.2 і рис.3 криві 1–5 ілюструють розподіли температури на поверхнях покриття і температурних характеристик уздовж покриття для таких значень термоопору на ділянці  $6 \leq x < 14$ : 1 -  $r_2 = 5,7$ ; 2 -  $r_2 = 6,3$ , 3 -  $r_2 = 11,4$ ; 4 -  $r_2 = 22,8$ ; 5 -  $r_2 = \infty$ . Зауважимо, що крива 1 відповідає відсутності відшарування покриття від основи, коли термоопір уздовж усього інтерфейсу сталий ( $r_1 = r_2 = r_3 = 5,7$ ); криві 2–4 – збільшенню термоопору на ділянці відшарування ( $r_2 > r_1$ ,  $r_2 > r_3$ ); крива 5 – повній термоізоляції відшарованої ділянки  $r_2 = \infty$ .



**Рисунок 2.** Розподіл температур на нижній  $t(x, h)$  і верхній  $t(x, -h)$  поверхнях покриття (а) та температурних характеристик  $T_1$  і  $T_2$  (б) за теплоізоляції торців  $x = 0$  і  $x = l$

**Figure 2.** The distributions of temperature at the lower  $t(x, h)$  and the upper  $t(x, -h)$  surfaces of the coating (a) and the temperature characteristics  $T_1$  and  $T_2$  (б) in the case of thermal insulation of the end surfaces  $x = 0$  and  $x = l$

*Термоізолювані торці покриття.* На рис.2а зображено розподіл температури  $t$  на лицевій поверхні покриття  $z = h$  (суцільні лінії) та на інтерфейсі покриття-основа  $z = -h$  (штрихові лінії) для різних значень термоопору на відшарованій ділянці  $6 \leq x < 14$ . Бачимо, що відшарування підвищує температуру на обох поверхнях покриття. Збільшення термоопору на ділянці порушення адгезії зумовлює різке зростання температури покриття, особливо на межі покриття-основа. Найбільший ріст температури відбувається за теплоізоляції нижньої поверхні покриття на ділянці відшарування (тобто при  $r_2 = \infty$ ). При віддаленні від цієї ділянки збурення температури, зумовлене підвищенням термоопору на ній, швидко спадає і на торцях покриття (при  $x = 0$ ,  $x = 20$ ) не перевищує 1%.

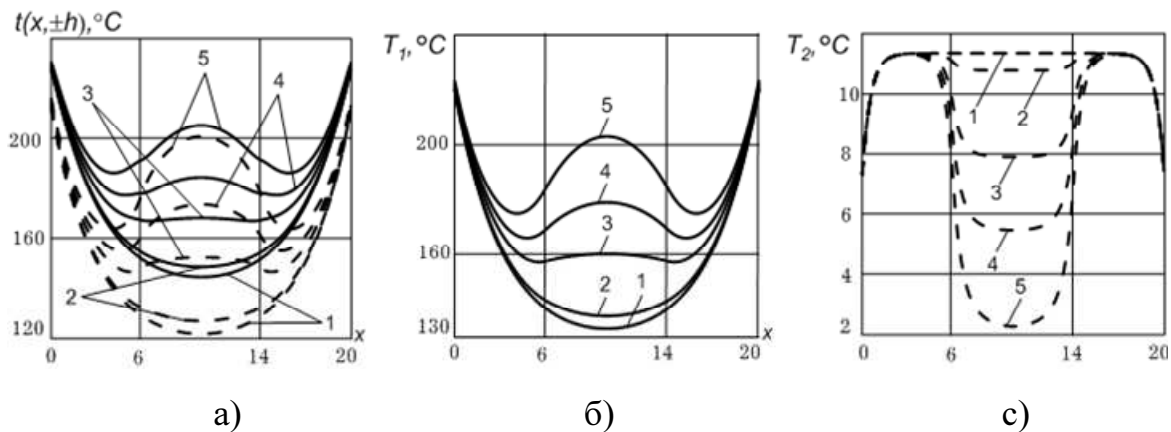
Суцільними лініями на рис. 2б показано розподіл середньої температури  $T_1$ , а штриховими – температурного моменту  $T_2$  за тих же значень термоопору на ділянці порушення адгезії  $6 \leq x < 14$ . Розподіл середньої температури якісно аналогічний до розподілу температури на поверхнях покриття. Температурний момент  $T_2$  у межах ділянки відшарування спадає зі зростанням термоопору на ній.

*Конвективний теплообмін на торцях покриття.* На рис.3а суцільними і штриховими лініями показано розподіл температури на поверхнях покриття  $z = h$  і  $z = -h$  за конвективного теплообміну на його торцях  $x = 0$  і  $x = l$  із середовищем, температура якого така ж, як і температура середовища на лицевій поверхні  $t_c^1 = t_c^2 = t^+ = 250^\circ\text{C}$ .

Бачимо, що абсолютний максимум температури досягається саме на торцях покриття, де за їх теплоізоляції температура була мінімальною (див. рис.2). За відсутності відшарування (криві 1) мінімум температури досягається посередині покриття (при  $x = 10$ ). Коли відшарування зумовлює локальне збільшення термоопору на 10% порівняно з термоопором на ділянках повної адгезії (тобто  $r_2 = 6.3$  проти  $r_1 = r_3 = 5.7$ ), то температура на поверхнях покриття дещо підвищується, хоча локалізація точки її мінімуму не змінюється (криві 2). Якщо ж на ділянці відшарування



термоопір зростає вдвічі й більше, то посередині покриття виникає локальний максимум температури (криві 3–5), а її мінімум досягається ззовні відшарування на ділянках повної адгезії (в точках  $x = 5.3$ ,  $x = 14.7$  при  $r_2 = 11.4$ ; в точках  $x = 4.8$ ,  $x = 15.2$  при  $r_2 = 22.8$ ; в точках  $x = 4.1$ ,  $x = 15.9$  при теплоізоляції відшарованої ділянки (при  $r_2 = \infty$ )).



**Рисунок 3.** Розподіл температур на нижній  $t(x, h)$  і верхній  $t(x, -h)$  поверхнях покриття (а) та температурних характеристик  $T_1$  (б) і  $T_2$  (с) за впливу теплообміну з торців  $x = 0$  і  $x_1 = l$

**Figure 3.** The distributions of temperature at the lower  $t(x, h)$  and the upper  $t(x, -h)$  surfaces of the coating (a) and the temperature characteristics  $T_1$  (б) and  $T_2$  (c) in the case of heat exchange at the end surfaces  $x = 0$  and  $x_1 = l$

Розподіл середньої температури покриття  $T_1$  (рис.3б) якісно аналогічний до розподілу температури на його поверхнях. Температурний момент за повної адгезії на межі покриття-основа на ділянці  $2.3 < x < 17.7$  набуває практично сталого значення  $T_2 = 11.3$  (крива 1 на рис.3с), але під впливом теплообміну з довкіллям на торцях у межах відрізків  $0 < x < 2.3$  і  $17.7 < x < 20$  спадає при наближенні до торців, досягаючи на них мінімуму  $T_2 = 7.3$ . Зі збільшенням термоопору на ділянці відшарування (криві 2–5) температурний момент спадає в межах ділянки  $2.3 < x < 17.7$ , досягаючи мінімуму на її середині, а на ділянках  $0 < x < 2.3$  і  $17.7 < x < 20$  його поведінка аналогічна, як у випадку повної адгезії. Слід зауважити, що коли термоопір на ділянці відшарування більший за  $r_2 > 14.2$ , то значення температурного моменту стають меншими ніж на торцях і досягають абсолютного мінімуму  $T_2 = 2.3^\circ\text{C}$  при теплоізоляції відшарованої ділянки ( $r_2 = \infty$ ) на її середині.

**Висновки.** Розглянуто задачу про визначення температури в тонкому термобар'єрному покритті, частково відшарованому від основи, за конвективного теплообміну з довкіллям на лицевій (верхній) поверхні покриття та його торцях за недосконалого теплового контакту з основою, який враховано термоопором. Вважаємо, що на ділянці розшарування, у зв'язку з погіршенням теплообміну між основою і покриттям, термоопір є більшим, ніж на ділянках повної адгезії. Коефіцієнти тепловіддачі на лицевій поверхні покриття залежать від координати. Використовуючи метод варіації сталої, розроблено спосіб зведення крайової задачі теплопровідності для покриття до системи інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду відносно функцій, що є лінійними комбінаціями інтегральних характеристик температури в покритті

(середньої температури і температурного моменту). Використовуючи метод квадратурних формул, побудовано числову схему розв'язування цих інтегральних рівнянь.

Наведено результати числового аналізу розподілу температури на лицевій поверхні покриття та на межі його контакту з основою, а також середньої температури та температурного моменту в покритті за теплоізоляції його торців та за конвективного теплообміну на них із зовнішнім середовищем при різних значеннях термоопору на ділянці відшарування. Виявлено, що його зростання призводить до значного підвищення температури як на лицевій поверхні покриття, так і на межі покриття-основа, а також середньої температури. Водночас температурний момент на ділянці відшарування зменшується в порівнянні з випадком відсутності відшарування.

**Conclusions.** The problem of determining temperature in the thin thermal barrier coating, which is partially delaminated from the base, is considered taking into account the convective heat exchange with the surrounding environment at the front (upper) and end surfaces of the coating and the imperfect thermal contact with the base, which is modeled by thermal resistance. It is assumed that thermal resistance in the separation region is greater than thermal resistance in the regions of full adhesion due to deterioration of heat exchange between the base and the coating. The heat-transfer coefficients at the front surface of the coating are coordinate-dependent. Utilizing the method of variation of constants, an approach for reducing the heat conduction boundary value problem for the coating to a system of Fredholm integral equations of the second kind for the functions that are linear combinations of the integral characteristics of the coating temperature (the mean temperature and the temperature moment) is developed. A numerical scheme for solving the system of integral equations is constructed using the quadrature method. Assuming thermal insulation of the end surfaces or convective heat exchange with the surrounding environment at them, the results of numerical analysis of temperature distributions at the front surface of the coating and at the interface between the coating and the base and distributions of the mean temperature and the temperature moment in the coating are given for different values of thermal resistance in the separation region. It is revealed that an increase in thermal resistance leads to a significant increase in the mean temperature as well as temperature at the front surface and at the interface between the coating and the base. However, the temperature moment in the separation zone decreases in comparison with the case when the delamination does not occur.

#### Список використаної літератури

1. Подстригач, Я. С. Термоупругость тел неоднородной структуры [Текст] / Я. С. Подстригач, В. А. Ломакин, Ю. М. Коляно. – М. : Наука, 1984. – 368 с.
2. Sugano, Y. Material design for reduction of thermal stress in a functionally graded material rotating disk [Текст] / Y. Sugano, R. Chiba, K. Hirose, K. Takahashi // JSME international journal. Series A. – 2004. – Vol. 47, No2. – P. 189–197.
3. Sugano, Y. Transient thermal stresses in a rectangular plate due to ariation of heat-transfer coefficients on upper and lower surfaces [Текст] / Y. Sugano// Int J. Engng Sri. – 1983. – 21, №10. – P. 1203–1214.
4. Подстригач, Я. С. Учет теплоотдачи при локальном нагреве тонкостенных элементов конструкций [Текст] / Я. С. Подстригач, Ю. М. Коляно // Докл. Академии наук СССР. – 1975. – 225, №4. – С. 778–781.
5. Хапко, Б. С. Термічний прогин смуги і прямокутної пластинки із залежними від координати коефіцієнтами тепловіддачі [Текст] / Б. С. Хапко, А. І. Чиж // Мат. методи та фіз. -мех. поля. – 2009. – 52, №4. – С. 198–206.
6. Вигак, В. М. О построении решения уравнения теплопроводности для кусочно-однородного тела [Текст] / В. М. Вигак // Докл. АН УССР. – Серия А. – 1980. – №1. – С. 30–32.
7. Коляно, Ю. М. Об одном эффективном методе решения задач термоупругости для кусочно-однородных тел, нагреваемых внешней средой [Текст] / Ю. М. Коляно, В. С. Попович В. С. // Физ. -хим. механика материалов. – 1976. – №2. – С. 108–112.
8. Кушнір, Р. М. Про побудову розв'язків звичайних лінійних диференціальних рівнянь з кусково-сталими коефіцієнтами [Текст] / Р. М. Кушнір // Доп. АН УРСР. Серия А. – 1980. – №9. – С. 54–57.

9. Процюк, Б. В. Побудова фундаментальної системи розв'язків звичайного лінійного диференціального рівняння з розривними і сингулярними коефіцієнтами [Текст] / Б. В. Процюк // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 1999. – 42, №4. – С. 116–122.
10. Образцов, И. Ф. Строительная механика скошенных тонкостенных систем [Текст] / И. Ф. Образцов, Г. Г. Онанов. – М. : Машиностроение, 1973. – 659 с.
11. Гольдштейн, Р. В. Оценка влияния податливости положки на напряжения, вызывающие потерю устойчивости отслоившегося покрытия [Текст] / Р. В. Гольдштейн, К. Б. Устинов, А. В. Ченцов // *Вычислительная механика сплошных сред.* – 2011. – Т. 4, №3. – С. 48–57.
12. Люкшин, П. А. Моделирование напряженно-деформированного состояния и потери устойчивости термобарьерного покрытия при тепловом ударе [Текст] / П. А. Люкшин, Б. А. Люкшин, Н. Ю. Матолыгина, С. В. Панин // *Физическая мезомеханика.* – 2011. – Т. 14, №1. – С. 33–41.
13. Моделирование отслоения термобарьерных покрытий под действием температурных напряжений [Электронный ресурс] / П. А. Люкшин, Б. А. Люкшин, Н. Ю. Матолыгина, С. В. Панин // *Совр. проблемы прикл. матем. и мех. : теория, эксперимент и практика. Материалы Междунар. конф., посв. 90-летию со дня рожд. акад. Н. Н. Яненко.* – Новосибир. : ИВТ СО РАН. – 2011. – Режим доступа: [http://conf.nsc.ru/files/conferences/niknik-90/fulltext/35766/47806/%28Новосибирск\\_2%29.pdf](http://conf.nsc.ru/files/conferences/niknik-90/fulltext/35766/47806/%28Новосибирск_2%29.pdf).
14. Кит, Г. С. Задача термоупругости для биматериала с межфазной трещиной, берега которой контактируют на центральном участке [Текст] / Г. С. Кит, Р. М. Мартыняк, С. П. Нагалка, Х. И. Гончар // *Теоретическая и прикладная механика.* – 2002. – Вып. 36. – С. 83–90.
15. Мартыняк, Р. М. Моделювання термопружної поведінки біматеріалу з теплопроникною міжфазною тріщиною [Текст] / Р. М. Мартыняк, Х. І. Гончар // *Прикл. проблеми мех. і мат.* – 2005. – Вып. 3. – С. 83–88.
16. Гольдштейн, Р. В. Ефект часткового закриття міжфазної тріщини з теплопровідним заповнювачем і поверхневими плівками при дії на біматеріал термічного навантаження [Текст] / Р. В. Гольдштейн, Г. С. Кит, Р. М. Мартыняк, Х. І. Середницька // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2012. – Т. 55, №4. – С. 64–73.
17. Мартыняк, Р. М. Термічне розкриття початково закритої міжфазної тріщини за неідеального теплового контакту берегів [Текст] / Р. М. Мартыняк // *Физ.-хим. механика материалов.* – 1999. – Т. 35, №5. – С. 14–22.
18. Шлыков, Ю. П. Контактное термическое сопротивление [Текст] / Ю. П. Шлыков, Е. А. Ганин, С. Н. Царевский. – М. : Энергия, 1977. – 328 с.
19. Подстригач, Я. С. Термоупругость тонких оболочек [Текст] / Я. С. Подстригач, Р. Н. Швец. – К. : Наук. думка, 1978. – 344 с.
20. Хапко, Б. С. Температурные напряжения в прямоугольной пластинке с распределенными по произвольной кривой источником тепла [Текст] / Б. С. Хапко // *Мат. методы и физ.-мех. поля.* – 1982. – Вып. 16. – С. 48–52.
21. Верлань, А. Ф. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ [Текст] / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. – К. : Наук. думка, 1978. – 292 с.

*Отримано 11.03.2015*