

УДК 539.3

Т. Соляр, канд. фіз.-мат. наук

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ТРІЩИН У ПЛАСТИНКАХ НА ОСНОВІ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВІДНОСНО СТРИБКІВ ПЕРЕМІЩЕНЬ

Резюме. Наведено алгоритм розрахунку напружень у пластинках із тріщинами, який базується на інтегральних рівняннях, записаних відносно стрибків переміщень їх берегів. Сингулярні інтегральні рівняння побудовано за допомогою методу Мухелішвілі. Для розв'язування інтегральних рівнянь застосовано метод механічних квадратур, у якому використано квадратурні формули типу Гауса для регулярних інтегралів і інтегралів з ядрами Коші. В результаті задачу зведено до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно стрибків переміщень берегів тріщин у вибраних вузлових точках. Коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) виражено через значення цих переміщень за допомогою інтерполяційної формули або поліному, побудованого методом найменших квадратів. Виконано розрахунки КІН для пластинок з прямолінійними і криволінійними тріщинами за дії в околі тріщин зосереджених сил. Показано, що отримані результати для випадку прямолінійних тріщин практично збігаються із аналітично знайденим розв'язком.

Ключові слова: пластинки, тріщини, стрибки переміщень, напруження, переміщення, коефіцієнти інтенсивності напружень, сингулярні інтегральні рівняння, ядра Коші.

T. Solyar

DETERMINATION OF STRESSES NEAR THE CRACKS IN PLATES ON THE BASIS OF INTEGRAL EQUATIONS RELATIVELY THE DISPLACEMENT JUMPS

Summary. A calculation algorithm of stresses in the plates with cracks, based on integral equations written relative to the displacement jumps of their faces, is presented. Singular integral equations are constructed by the Muskhelishvili method. To solve the integral equations the method of mechanical quadratures is used, where the quadrature formulas of Gauss type are used for regular integrals and integrals with Cauchy kernels. As a result the problem is reduced to solution a system of linear algebraic equations with respect to the displacement jumps of the crack faces at the chosen nodes. The stress intensity factors (SIF) are expressed in terms of the values of these displacements by means of interpolation formula or polynomial constructed by the least quadrature method. The cases when this approach has advantages over the known algorithms in literature, based on integral equations constructed relative to the derivatives from the displacement jumps, are considered. In particular, the calculations of SIF are carried out for the plates with rectilinear and curvilinear cracks under the concentrated forces acting in the crack vicinity. It is shown that the obtained results for the case of rectilinear cracks coincide practically with solution found analytically. It is shown that the proposed approach can be used to study SIF in the cases when loads are described by discontinuous functions (the problems of such class arise when considering plastic deformation in the crack tip vicinity according to Dugdeila model or when considering the cohesive force). The problem arising when considering the plate with curvilinear crack extending at infinity is studied in detail. It is assumed that on the crack extension the cohesive forces arise. The normal component of cohesive forces is assumed to be given. The tangential of component of cohesive forces and the sizes of the region of their action are found from the condition of stress boundedness. In special cases obtained results of calculations are coordinated with the known in the literature solutions For curved crack the

region action sizes of forces of cohesion and their tangential component depending on the applied efforts and the form of crack are investigated.

Key words: plates, cracks, displacement jumps, stresses, displacements, stress intensity factor, singular integral equations, Cauchy kernels.

Вступ. Однією з важливих проблем механіки руйнування є визначення та дослідження напружено-деформованого стану (НДС) тіл з дефектами типу тріщин. Для розрахунку НДС пластинок складної форми з тріщинами одним із найефективніших виявився метод інтегральних рівнянь із додатковим застосуванням методів теорії функцій комплексної змінної. Основна перевага цього підходу полягає в зменшенні розмірності задачі порівняно з іншими числовими підходами. Інтегральні рівняння для пластинок із тріщинами в літературі, як правило, записують відносно невідомих похідних від стрибків переміщень берегів тріщин. Значний вклад у розвиток таких підходів внесли В.В. Панасюк, М.П. Саврук, О.П. Дацишин та інші [1–3]. Температурні задачі теорії тріщин розвинені в роботах Г.С. Кіта та його учнів [4].

Для розв'язування окремих класів таких задач ефективнішими є підходи, що базуються на інтегральних рівняннях, у яких невідомими є безпосередньо стрибки переміщень берегів тріщин [5]. У роботі записано такого типу інтегральні рівняння для пластинок із криволінійними тріщинами, розроблено числовий алгоритм їх розв'язування та проілюстровано його ефективність.

Постановка задачі. Розглянемо пластинку з тріщинами, яка навантажена на нескінченності, зосередженими силами та зусиллями, які прикладені до берегів тріщин і є однаковими на протилежних берегах. Позначимо область, яку займає пластинка, через D , контури, на яких лежать тріщини, – через $L_j, j=1, \dots, J$, проекції вектора зусиль, прикладених до берегів тріщин, – через (X_L, Y_L) . Тут і надалі прийнято, що вибраний додатний напрямок обходу кривих і вектор напружень визначається на площинках, що розміщені справа відносно обходу. Для розв'язування поставленої задачі запишемо інтегральні рівняння відносно невідомих стрибків переміщень берегів тріщин. Для визначення стрибків задовольнятимемо умову для інтегралів від зусиль, прикладених до тріщин, що дозволяє отримати сингулярні інтегральні рівняння. Такого типу рівняння виникають також і у відомих в літературі методах, у яких невідомими є функції з меншим ступенем гладкості – похідні від стрибків переміщень.

Позначимо напруження у суцільній пластинці, які зумовлені прикладеним навантаженням, через $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$, та відповідний їм вектор зусиль на кривій $L = L_1 + \dots + L_J$ – через (X_0, Y_0) . Тоді напруження в пластинці з тріщинами будуть дорівнювати сумі $\sigma_x^0 + \sigma_x, \sigma_y^0 + \sigma_y, \tau_{xy}^0 + \tau_{xy}$, де $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ – напруження у пластинці з тріщинами, до берегів якої прикладені зусилля $X = X_L - X_0, Y = Y_L - Y_0$.

Другу складову будемо знаходити через комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі $\varphi(z), \psi(z)$. Розглянемо довільний контур Γ , який належить області D . Позначимо вектори переміщень і напружень на ньому через $(u, v), (X_n, Y_n)$. Для них справедливі співвідношення [5]

$$\varphi(z) + \overline{z\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = q(z) + C, \quad \chi\varphi(z) - \overline{z\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} = 2G(u + iv), \quad (1)$$

де G – модуль зсуву; $\chi = (3 - \nu) / (1 + \nu)$; ν – коефіцієнт Пуассона;

$q = i \int (X_n + iY_n) ds$; C – комплексна стала; напрямок інтегрування вибираємо таким, щоб область, на межі якої визначено (X_n, Y_n) , залишалася зліва.

Розв'язування задачі. Зі співвідношень (1) для стрибків потенціалів на кривих L_j маємо [2,5]

$$[\varphi] = \frac{2G}{1+\chi} [u+iv], [\psi] = [\bar{\varphi}] + \bar{z}[\varphi'].$$

Звідси

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L g \frac{dt}{t-z}, \quad \psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[-\bar{g} \frac{dt}{t-z} + g \left(\frac{d\bar{t}}{t-z} - \frac{\bar{t}dt}{(t-z)^2} \right) \right], \quad (2)$$

де

$$g = \frac{2G}{1+\chi} [u+iv].$$

Підставляючи потенціали (2) у першу з формул (1) при $z \in D$, спрямувавши далі $z \rightarrow L_j$ та використавши формулу Сохоцького, отримуємо інтегральне рівняння

$$\int_L \left[g \left(\frac{d\bar{t}}{\bar{t}-z} + \frac{dt}{t-z} \right) - \bar{g} \left(\frac{dt}{\bar{t}-z} + \frac{(z-t)d\bar{t}}{(\bar{t}-z)^2} \right) \right] = S + C_j, \quad z \in L_j, \quad (3)$$

де $S = 2\pi i(q_L - q_0)$; $q_0 = i \int (X_0 + iY_0) ds$; $q_L = i \int (X_L + iY_L) ds$; C_j – невідомі комплексні сталі.

Тут інтеграли Коші розглядаються в сенсі головного значення.

Позначимо проекції вектора переміщень на дотичну і нормаль до тріщини в довільній точці через (u_α, u_β) . Між переміщеннями (u, v) і (u_α, u_β) має місце залежність

$$u + iv = (u_\alpha + iu_\beta) dz / ds.$$

Введемо надалі нову функцію $f = g \frac{d\bar{t}}{ds} = \frac{2G}{1+\chi} [u_\alpha + iu_\beta]$. Тоді рівняння (3) набудуть вигляду

$$\int_L \left[f \left(\frac{1}{\bar{t}-z} + \frac{1}{t-z} T \right) - \bar{f} \left(\frac{1}{\bar{t}-z} + \frac{(z-t)\bar{T}}{(\bar{t}-z)^2} \right) \right] ds = S + C_j, \quad z \in L_j, \quad (4)$$

де $T = \frac{dt}{d\bar{t}}$.

Розглянемо детальніше випадок однієї тріщини. Для розв'язування рівняння (4) використаємо метод механічних квадратур. Опишемо рівняння тріщини параметрично $z = \omega(\xi)$, $-1 \leq \xi \leq 1$. Невідому функцію f шукаємо у вигляді $f(\omega(\xi)) = F(\xi) \sqrt{1-\xi^2}$, де F – гладка комплексна функція.

В інтегральне рівняння (4) входять інтеграли вигляду

$$J_0 = \int_{-1}^1 \sqrt{1-\xi^2} V(\xi) d\xi, \quad J(x) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-\xi^2} \frac{V(\xi)}{\xi-x} d\xi, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

де $V(\xi)$ – гладка функція.

Для них справедливі формули [2]

$$J_0 = \sum_{n=1}^N A_n V(\xi_n), \quad J(x_k) = \sum_{n=1}^N A_n \frac{V(\xi_n)}{\xi_n - x_k}, \quad k = 1, \dots, N+1, \quad (5)$$

де

$$\xi_n = \cos(\pi_N n), \quad n = 1, \dots, N; \quad x_k = \cos[\pi_N (k - 0,5)], \quad k = 1, \dots, N+1;$$

$$A_n = (1 - \xi_n^2) \pi_N; \quad \pi_N = \pi / (N+1)$$

Квадратурні формули (5) побудовані на основі інтерполяційної формули [2, 6]

$$V(\xi) \approx \frac{1}{N+1} \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} V(\xi_n) (1 - \xi_n^2) \frac{U_N(\xi)}{\xi - \xi_n}, \quad (6)$$

де $U_N(\xi)$ – поліном Чебишева другого роду.

Застосувавши формули (5) до інтегралів у системі рівнянь (4), отримуємо систему алгебраїчних рівнянь вигляду

$$\sum_{n=1}^N (A_{kn} R_n + B_{kn} I_n) - C = S_k, \quad k = 1, \dots, N+1, \quad (7)$$

де $R_n + iI_n = F_n$, $F_n = F(\xi_n)$, $S_k = S(z_k)$,

$$A_{kn} = A_n s_n' \left[\frac{1}{t_n - z_k} T_n - \frac{(z_k - t_n)}{(t_n - z_k)^2} \overline{T_n} \right], \quad B_{kn} = i A_n s_n' \left[\frac{2}{t_n - z_k} + \frac{1}{t_n - z_k} T_n + \frac{(z_k - t_n)}{(t_n - z_k)^2} \overline{T_n} \right],$$

$$t_n = \omega(\xi_n), \quad z_k = \omega(x_k), \quad T_n = \omega'(\xi_n) / \overline{\omega'(\xi_n)}, \quad s_n' = |\omega'(\xi_n)|.$$

Таким чином, отримано систему $N+1$ рівнянь відносно $N+1$ невідомих $F_{1, \dots, N}$ та C .

Використавши результати, наведені у [2], запишемо співвідношення, за якими визначаються КІН,

$$K_l^\pm - iK_{II}^\pm = \mp \lim_{t \rightarrow l^\pm} \sqrt{2\pi |t - l^\pm|} \gamma(t),$$

де

$$\gamma(t) = -i \frac{2G}{\chi+1} \frac{d}{dt} \left[(u^+ + iv^+) - (u^- + iv^-) \right].$$

Тут позначено l^- і l^+ – координати початку і кінця тріщини. Враховуючи, що у розглядуваному випадку

$$\gamma = -i \frac{d}{dt} (fdt / ds) = -i \frac{d}{dt} \left(\sqrt{1-\xi^2} F \frac{dt}{ds} \right),$$

отримуємо

$$\frac{K_I^\pm - iK_{II}^\pm}{\sqrt{\pi}} = -i \frac{F(\pm 1)}{\sqrt{|\omega'(\pm 1)|}}. \quad (8)$$

Зазначимо, що на основі цієї формули в околі т. $z = l^\pm$ можна записати

$$[u_\alpha(z) + iu_\beta(z)] \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1+\chi}{2G} (K_I^\pm + iK_{II}^\pm) \sqrt{|z-l^\pm|}.$$

Значення $F(\pm 1)$ у формулі (8) знаходимо на основі співвідношення (6)

$$F(1) = \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} F_k (1 + \xi_k), \quad F(-1) = (-1)^{N+1} \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} F_k (1 - \xi_k).$$

Значення $F(\pm 1)$ визначали також й іншим методом. Із інтегрального рівняння значення функції $F_k = F(\xi_k)$ визначені в точках, які задовольняють нерівності $|\xi_k| < 1$. Тому знаходження значень $F(\pm 1)$ на основі значень F_k необхідно проводити з використанням екстраполяційних формул, точність яких нижча за точність інтерполяційних формул. У зв'язку з цим будували поліноми для визначення функції $F(\xi)$ в околі кінців тріщини, коефіцієнти яких знаходили методом найменших квадратів на основі значень $F(\xi_k)$ у вузлових точках ξ_k , які вибирали прилеглими до точок $\xi = \pm 1$. Надалі значення $F(\pm 1)$ визначали на основі цих поліномів.

При розв'язуванні інтегрального рівняння необхідно визначати функцію q_0 , яка відповідає основному напруженому стану. Розглянемо випадок, коли відомими є потенціали $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$, через які описується основний напружений стан. Тоді маємо

$$q_0 = \varphi_0(z) + z \overline{\varphi_0(z)} + \overline{\psi_0(z)}.$$

Зокрема, розглянемо розтяг пластинки на нескінченності зусиллями $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty$. Потенціали, які відповідають цьому випадку, в суцільній пластинці будуть [5]

$$\varphi_0(z) = \frac{\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty}{4} z, \quad \psi_0(z) = \left(\frac{\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty}{4} + i\tau_{xy}^\infty \right) z.$$

Звідси

$$q_0 = (\sigma_y^\infty - i\tau_{xy}^\infty)x + (-\tau_{xy}^\infty + i\sigma_x^\infty)y.$$

При дії зосередженої сили (X_0, Y_0) у довільній точці z_0 відповідна функція q матиме вигляд [5]

$$q_0 = P_0 \left[-\ln(z - z_0) + \chi \overline{\ln(z - z_0)} \right] - P \frac{z - z_0}{z - z_0},$$

де $P_0 = \frac{X_0 + iY_0}{2\pi(1 + \chi)}$.

Проілюструємо застосовність даного підходу до задач, у яких безпосереднє використання інтегральних рівнянь відносно похідних від переміщень є ускладненим.

Результати розрахунків. Розглянемо пластинку з прямолінійною тріщиною $(-a, a)$, яка навантажена зосередженою силою $(0, P)$, прикладеною в точці $(0, y_0)$. Розраховані відносні КІН $F_{I,II} = 2K_{I,II} \sqrt{\pi a} / P$ наведено у табл.1 у другому, четвертому, шостому та дев'ятому стовпцях. Для порівняння в таблиці наведено також значення КІН, які розраховані на основі аналітичної формули, наведеної в [7].

Таблиця 1

Відносні КІН для прямолінійної тріщини за дії зосередженої сили

y_0 / a	F_I	F_I [7]	F_{II}	F_{II} [7]	y_0 / a	F_I	F_I [7]	F_{II}	F_{II} [7]
0,1	1,0014	1,0014	-0,3792	-0,379	0,01	1,0001	1	-0,3562	-0,3528
0,2	1,0051	1,0051	-0,4039	-0,4037	0,02	1,0001	1,0001	-0,3568	-0,3558
0,3	1,0092	1,0092	-0,4208	-0,4206	0,03	1,0001	1,0001	-0,3592	-0,3588
0,4	1,0117	1,0117	-0,4281	-0,4279	0,04	1,0002	1,0002	-0,362	-0,3618
0,5	1,0107	1,0107	-0,426	-0,4258	0,05	1,0004	1,0004	-0,3649	-0,3647
0,6	1,005	1,005	-0,4158	-0,4156	0,06	1,0005	1,0005	-0,3678	-0,3677
0,7	0,9943	0,9944	-0,3995	-0,3993	0,07	1,0007	1,0007	-0,3707	-0,3706
0,8	0,9789	0,979	-0,3789	-0,3788	0,08	1,0009	1,0009	-0,3736	-0,3734
0,9	0,9595	0,9596	-0,3561	-0,356	0,09	1,0012	1,0012	-0,3764	-0,3762
1	0,9369	0,937	-0,3323	-0,3322	0,1	1,0014	1,0014	-0,3792	-0,379

При розв'язуванні інтегральних рівнянь обмежувалися 60-ма вузловими точками при $y_0 / a > 0,1$ та 100-ма точками при $y_0 / a < 0,1$. Із табл.1 бачимо, що запропонований підхід дозволяє розраховувати КІН з високою точністю, в тому числі й для сил, що діють близько біля тріщини.

Розглянуто пластинку з криволінійною тріщиною, що лежить на параболі $y = k(x^2 - a^2) / a$, $-a < x < a$, яка навантажена силою P у точці з координатами $(0, y_0)$. Розраховані відносні КІН при $k=0,5$ і $k=0,25$ наведено в табл.2.

Таблиця 2

Відносні КІН для криволінійної тріщини за дії зосередженої сили

$k = 0,5$			$k = 0,25$		
y_0 / a	F_I	F_{II}	y_0 / a	F_I	F_{II}
-0,5	0,7188	0,1648	-0,25	0,7394	0,5401
-0,52	0,6811	0,2083	-0,27	0,673	0,5837
-0,54	0,684	0,2047	-0,29	0,6775	0,5812
-0,56	0,6867	0,2015	-0,31	0,6819	0,5789
-0,58	0,6891	0,1988	-0,33	0,6861	0,5768
-0,6	0,6911	0,1964	-0,35	0,6899	0,5749
-0,62	0,6929	0,1943	-0,37	0,6934	0,5732
-0,64	0,6944	0,1926	-0,39	0,6966	0,5717
-0,66	0,6956	0,1911	-0,41	0,6995	0,5703
-0,68	0,6964	0,1899	-0,43	0,702	0,5692
-0,7	0,6971	0,1889	-0,45	0,7041	0,5681

У літературі часто розглядаються задачі, в яких навантаження описуються розривними функціями. Зокрема, такі задачі виникають при врахуванні пластичного деформування в околі вершин тріщин за моделлю Дагдейла або при врахуванні сил зчеплення. Безпосереднє використання для цього класу задач інтегральних рівнянь, побудованих на основі похідних від стрибків від переміщень, є неефективним. Тому для таких задач розроблено складний підхід, у якому попередньо виділяють особливий розв'язок [2], причому він застосовувався для випадку прямолінійних тріщин.

У той же час для таких задач може бути безпосередньо використаний запропонований алгоритм, оскільки при розривних навантаженнях права частина в рівнянні (4) та сам стрибок переміщень описуються неперервними функціями.

Для оцінювання точності наведеного підходу розглянуто нескінченну пластинку з прямолінійною тріщиною $y = 0$, $-l < x < l$, береги якої перебувають під внутрішнім тиском p при $-\xi_2 < x < -\xi_1$, $\xi_1 < x < \xi_2$. Розраховані відносні значення КІН $F_I = \frac{K_I}{p\sqrt{\pi l}}$ при $\xi_2 = l$ та різних значеннях $d = (l - \xi_1) / l$, $N = 40$ наведено в 2-му стовпчику табл.3.

Для цього випадку КІН визначались за точною формулою [8]

$$K_I(\pm l) = -2p\sqrt{\frac{l}{\pi}} \arccos \frac{\xi}{l} \Big|_{\xi=\xi_1}^{\xi_2}. \quad (9)$$

Розраховані за формулою (9) КІН наведено в третьому стовпчику табл. 3. Із аналізу наведених у таблиці результатів бачимо, що розроблений підхід дозволяє розраховувати КІН з достатньою для практики точністю, в тому числі і при вузьких зонах дії тиску. При збільшенні кількості вузлових точок точність зростає. Зокрема, при $N=80$, $d=0,1$ і $0,2$ для F_I отримуємо практично точні дані $0,2872$ і $0,4097$.

Таблиця 3

Відносні КІН за розривного навантаження

d	F_I	F_I [8]
0,1	0.2879	0.2871
0,2	0.4102	0.4097
0,3	0.5066	0.5064
0,4	0.5903	0.5903
0,5	0.6668	0.6667
0,6	0.7380	0.7380
0,7	0.8061	0.8060
0,8	0.8718	0.8718
0,9	0.9362	0.9362

Отримані переміщення берегів тріщин порівнювали з переміщеннями, які для розглядуваного випадку знайдено аналітично у вигляді [8]

$$v(x) = p \frac{1+\chi}{2\pi G} \left[-\sqrt{l^2 - x^2} \arccos \frac{\xi}{l} + \frac{1}{2} w(x, \xi) \right] \Big|_{\xi=\xi_1}^{\xi_2},$$

де

$$w(x, \xi) = (x + \xi) \ln \frac{l[x + \xi]}{l^2 + x\xi - \sqrt{l^2 - x^2} \sqrt{l^2 - \xi^2}} + (x - \xi) \ln \frac{l|x - \xi|}{l^2 - x\xi + \sqrt{l^2 - x^2} \sqrt{l^2 - \xi^2}}.$$

Розраховані максимальні відносні похибки ε у відсотках, з якими визначаються переміщення за розробленим підходом у вузлових точках при різних значеннях d , наведено в табл.4.

Таблиця 4

Відносні похибки визначення переміщень берегів тріщини

d	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
ε	2.463	0.979	0.642	0.907	0.297	0.679	0.539	0.553	0.383

Розглянемо криволінійну тріщину, яка лежить на параболі $y = k(x^2 - c^2)/c$, $-c < x < c$. Нехай пластинка розтягується на нескінченності зусиллями σ_∞ у напрямку осі Oy . Прийемо, що на продовженні тріщини на параболі при $c < |x| < a$ виникають сили зчеплення $\sigma_n = \sigma_c$, $\tau_n = \tau_c$, де σ_n, τ_n – проекції вектора напружень на нормаль і дотичну. Нормальну складову сил зчеплення вважали заданою. Величину τ_c та розміри області дії сил зчеплення визначали з умови обмеженості напружень при $x = \pm a$.

Визначимо величину q_L для випадку, коли прикладені до берегів тріщин зусилля є кусково-неперевними. Нехай на кривій AB на ділянках AC , DB задано відповідно $\sigma_n = N_A$, $\tau_n = T_A$ і $\sigma_n = N_B$, $\tau_n = T_B$. Тоді, враховуючи, що

$$q_L = i \int (X_L + iY_L) ds = \int (\sigma_n + i\tau_n) dt,$$

$$\text{отримуємо } q_L = \begin{cases} (N_A + iT_A)(z - z_A), & z \in AC, \\ (N_A + iT_A)(z_C - z_A), & z \in CD, \\ (N_A + iT_A)(z_C - z_A) + (N_B + iT_B)(z - z_D), & z \in DB, \end{cases}$$

де z_A, z_B, z_D – координати точок A, B, D .

Розрахована залежність розмірів області зчеплення (величини $d = (a-c)/a$) залежно від прикладених зусиль (величини $\sigma = \sigma_\infty / \sigma_c$) за різних значень параметра параболи k зображена на рис.1.

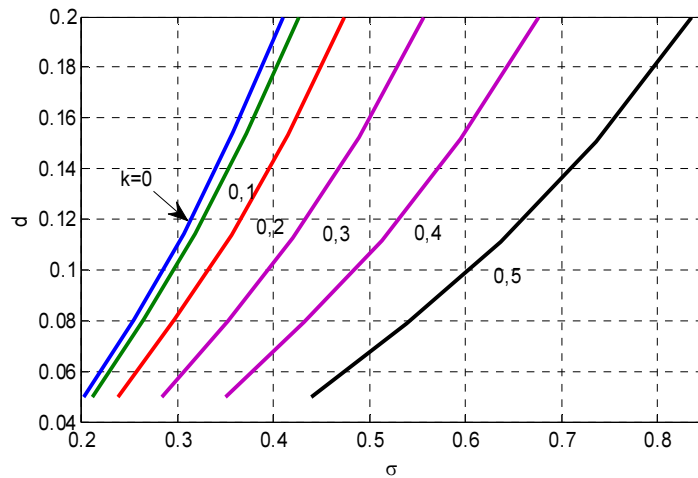


Рисунок 1. Залежність розмірів області зчеплення від прикладених зусиль

Figure 1. The dependence of region sizes of cohesion on the applied forces

Розраховані значення відносних дотичних сил зчеплення залежно від розмірів області дії цих сил наведено на рис.2. Крива на рис. 1 при $k = 0$, яка відповідає випадку прямолінійної тріщини, добре узгоджується з аналітичним розв'язком [8] $d = 1 - \cos(0,5\pi\sigma)$.

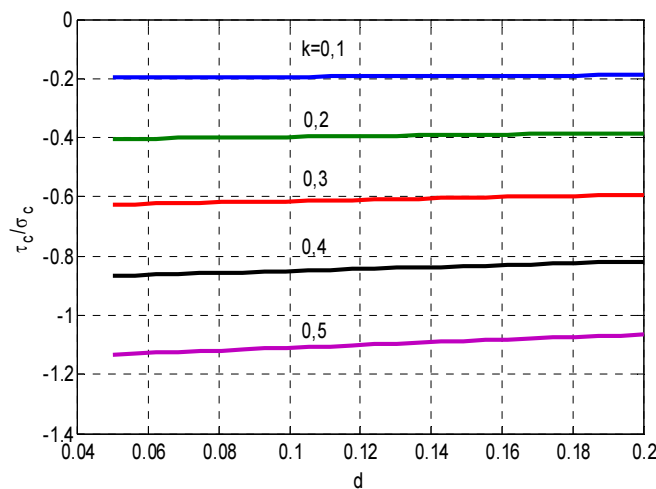


Рисунок 2. Залежність дотичних сил зчеплення від розмірів області дії сил

Figure 2. Dependence of tangential cohesion forces on the region sizes of the force action

Висновки. Наведено алгоритм розрахунку напружень у пластинках з тріщинами, який базується на інтегральних рівняннях відносно стрибків переміщень їх берегів. Розв'язування інтегральних рівнянь проведено методом механічних квадратур. Вказано випадки, коли розроблений підхід має переваги над відомими в літературі алгоритмами, що базуються на інтегральних рівняннях, побудованих відносно похідних від стрибків переміщень. Проведено розрахунки області дії сил зчеплення, що виникають на криволінійних тріщинах.

Conclusions. The algorithm for calculation of the stresses in plates with cracks is presented. It is based on integral equations relative to the displacement jumps of their faces. The solution of integral equations is made by mechanical quadrature method. The cases are given, when this approach has advantages over algorithms widespread in literature, which are based on integral equations constructed relative to the derivatives from the displacement jumps. The calculations of the region of action of cohesion forces arising on curvilinear cracks are carried out.

Список використаної літератури

1. Саврук, М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами [Текст] / М. П. Саврук. – Киев: Наук. думка, 1982. – 324 с.
2. Саврук, М. П. Численный анализ в плоских задачах теории трещин [Текст] / М. П. Саврук, П. Н. Осив, И. В. Прокопчук. – К. : Наук. думка, 1989. – С. 248.
3. Траєкторії розвитку крайових тріщин у тілах за умов граничного змащування [Текст] / О. П. Дацишин, В. В. Панасюк, Р. Е. Пришляк, А. Б. Терлецький // Фіз.-хім. мех. матеріалів. – 2001. – №1. – С. 7–16.
4. Кит, Г. С. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами [Текст] / Г. С. Кит, М. Г. Кривцун. – Киев: Наук. думка, 1983. – 280 с.
5. Линьков, А. М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости [Текст] / А. М. Линьков. – СПб. : Наука, 1999. – С. 382.
6. Mason, J. C. Chebyshev Polynomials [Text] / J. C. Mason, D. C. Handscomb // Press Company Boca Raton, London, New-York, Washington. – 2003. – P. 335.
7. Божидарнік, В. В. Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами [Текст] / В. В. Божидарнік, О. В. Максимович. – Луцьк: ЛДТУ, 2003. – С. 226.
8. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений [Текст] // В 2-х томах; под ред. Ю. Мураками. – М. : Мир, 1990. – Т. 1. – С. 448.

Отримано 31.03.2015