

Опанасович В. Згин ізотропної пластини з квадратною жорсткою шайбою і прямолінійною наскрізною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів / В. Опанасович, М. Слободян, В. Бедрій // Вісник ТНТУ — Тернопіль : ТНТУ, 2015. — Том 78. — № 2. — С. 81-93. — (Механіка та матеріалознавство).

УДК 539.3

**В. Опанасович, докт. фіз.-мат. наук;  
М. Слободян, канд. фіз.-мат. наук; В. Бедрій**

*Львівський національний університет імені Івана Франка*

## **ЗГИН ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З КВАДРАТНОЮ ЖОРСТКОЮ ШАЙБОЮ І ПРЯМОЛІНІЙНОЮ НАСКРІЗНОЮ ТРІЩИНОЮ З УРАХУВАННЯМ ШИРИНИ ОБЛАСТІ КОНТАКТУ ЇЇ БЕРЕГІВ**

*Резюме.* Досліджена задача про двосторонній згин ізотропної пластини з квадратною жорсткою шайбою та тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів. З використанням методів теорії функції комплексної змінної розв'язок задачі зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь як на межі жорсткого включення, так і на тріщині, яка розв'язана числово. Проведено числовий аналіз контактної зусилля між берегами тріщини, коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів, критичного навантаження при різних значеннях параметрів задачі.

*Ключові слова:* згин, ізотропна пластинка, наскрізна тріщина, жорстка шайба, комплексні потенціали, сингулярні інтегральні рівняння, коефіцієнти інтенсивності зусиль і моментів.

**V. Opanasovich, M. Slobodyan, V. Bedriy**

## **BENDING OF ISOTROPIC PLATE WITH SQUARE WASHER AND STIFF STRAIGHT CRACK TAKING INTO ACCOUNT CRACK SIDES CONTACT AREA WIDTH**

*Summary.* As a widely used industry lamellar structural elements, the strength of which are highly dependent on the type of defects cracks dramatically reduce the carrying capacity and operation design. As you know, these crack-like defects can occur both during the production design, and during its operation. Therefore the main task in assessing the allowable load of defect structures are effort and intensity factors moments.

In this paper we solve the problem of bending of isotropic plates with tight square washer and crack based on the width contact area, where it was placed on the axis of symmetry inclusion. Through contact crack solution to the problem is presented in the form of two problems: the plane problem of elasticity and bending problem, where we use the classical theory of bending plates. We will have boundary conditions on the boundary rigid inclusion and crack. To construct the solution of the plane problem and bending problem, we introduce the complex potentials as a sum of complex potentials for inclusion and crack. Based on the known dependencies that determine the stress-strain state of the plate potentials through the complex potentials after satisfaction of the boundary conditions for cracks and for inclusion singular integral equations have been obtained. This condition should correspond uniqueness deflection and rotation angles while traversing path cracks and unambiguous movements while traversing path cracks. After bringing the unknown functions and variables to dimensionless final system of singular integral equations with unknown complex functions and constants have been obtained. The resulting system of singular integral equations by the method of mechanical quadratures was reduced to a system of linear algebraic equations. This system of equations by Gauss with a choice of main element was numerically solved, and on the basis of these data were analyzed. The numerical analysis of the contact force between the shores of crack intensity factors moments of critical load for different values of parameters of the problem has been carried out. Based on numerical analysis, the following laws were stated: the value of the contact force is larger near the top than in the distant, and at a distance from the split washers, contact forces and combined intensity factor moments go to the constant value for a single crack.

*Key words:* banding, plate, through crack, washer, complex potentials, singular integral equations, the coefficients of the intensity of forces and moments.

**Вступ.** У різних галузях промисловості широко використовуються пластинчасті елементи конструкцій, міцність яких залежать від дефектів, особливо тріщин, які різко знижують допустиме навантаження та час експлуатації конструкції. У роботі [20] розв'язана задача про згин пластини з урахуванням контакту берегів тріщини у тривимірній постановці методом скінченних елементів. Числовий розв'язок для тонких пластин з тріщинами розглянуто в роботі [25]. Напружено-деформований стан у вершинах тріщин у тонких пластинах досліджено в роботах [22,23,28].

Дослідженням згину ізотропних пластин з тріщинами з урахуванням контакту їх берегів як по лінії, так і по області постійної товщини, проведено у публікаціях [2,5,6,7,16,17,18,19,21,24,26,27]. Згин кусково-однорідних пластин з тріщинами досліджено в працях [1,4,6], а згин пластини з абсолютно жорсткою круглою шайбою та тріщиною – в роботі [5].

Дослідження напружено-деформованого стану пластин з отворами та тріщинами з урахуванням контакту берегів розглянуто в роботах [8,9,10,11].

В даній роботі розв'язана задача про згин ізотропної пластини з квадратною жорсткою шайбою та тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів, коли вона розміщена на осі симетрії включення.

**Постановка задачі.** Розглянемо ізотропну пластину постійної товщини  $2h$  з пружними сталими  $\nu, E$  (коефіцієнт Пуассона, модуль Юнга), яка містить квадратне жорстке включення розміром  $2a$ . В серединній площині пластини виберемо декартову систему координат  $Oxy\tilde{z}$  з початком у центрі включення, направивши вісь  $Oy$  перпендикулярно до сторони квадрата. На осі  $Ox$  поза включенням знаходиться наскрізна прямолінійна тріщина завдовжки  $2l$ , береги якої вільні від

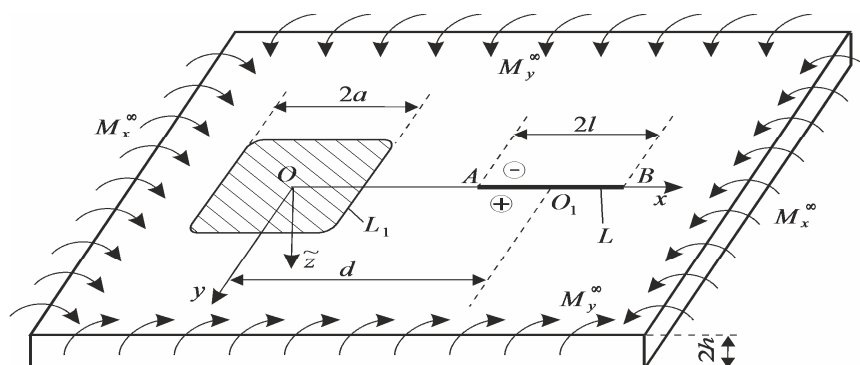


Рисунок 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщини

Figure 1. Scheme of plate load and cracks placing

зовнішнього навантаження, а під дією згинальних моментів на нескінченності  $M_x^\infty$  і  $M_y^\infty$  вони приходять у гладкий контакт по області постійної ширини  $h_1$  поблизу верхньої основи пластини. Центр тріщини знаходиться на відстані  $d$  від початку координат. Відрізок осі  $Ox$ , де розміщена тріщина, позначимо через  $L$ , межу жорсткого включення – через  $L_1$ ; граничне значення відповідної величини, коли  $y \rightarrow \pm 0$  на тріщині, будемо позначати відповідно значками «+» та «-».

За рахунок контакту берегів тріщини розв'язок задачі подамо у вигляді двох задач: плоскої задачі теорії пружності й задачі згину, де використаємо класичну теорією згину пластин.

Маємо такі крайові умови:

на межі жорсткого включення

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \partial_n w = 0, \quad s \in L_1; \quad (1)$$

та берегах тріщини [7]

$$\sigma_{yy}^{\pm} = -N / (2h), \quad \sigma_{xy}^{\pm} = 0, \quad x \in L, \quad (2)$$

$$P^{\pm} = 0, \quad M_y^{\pm} = \beta N, \quad x \in L, \quad (3)$$

$$\partial_x [v] + \alpha [\partial_{xy}^2 w] = 0, \quad x \in L, \quad (4)$$

де  $u, v$  – компоненти вектора переміщення відповідно по осях  $Ox$  та  $Oy$ , а  $\sigma_{xy}, \sigma_{yy}$  – компоненти тензора напружень у плоскій задачі;  $w$  – прогин пластини;  $M_y$  – згинальний момент;  $P$  – узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізувальна сила;  $N$  – контактне зусилля між берегами тріщини;  $n$  – нормаль до  $L_1$  в точці  $s$ .

$$[f] = f^+ - f^-. \quad \beta = 1 - \gamma / 3, \quad \alpha = (1 + (1 - \gamma)^2) / 2, \quad \gamma = h_1 / h.$$

**Побудова розв'язку плоскої задачі.** Введемо комплексні потенціали  $\Phi_{II}(z)$  і  $\Psi_{II}(z)$  [3], які подамо у вигляді

$$\Phi_{II}(z) = \Phi_{IIВ}(z) + \Phi_{IIТ}(z), \quad \Psi_{II}(z) = \Psi_{IIВ}(z) + \Psi_{IIТ}(z).$$

Тут і надалі індекс «В» означає, що відповідний комплексний потенціал відповідає за жорстке включення, а індекс «Т» – за тріщину.

Комплексні потенціали  $\Phi_{IIВ}(z)$  і  $\Psi_{IIВ}(z)$  згідно з [14] можна подати так:

$$\Phi_{IIВ}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} \frac{Q_1(u) du}{u - z}, \quad \Psi_{IIВ}(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{L_1} \left[ \frac{k \overline{Q_1(u)} d\bar{u}}{u - z} + \frac{\bar{u} Q_1(u) du}{(u - z)^2} \right], \quad (5)$$

де  $Q_1(u)$  – невідома шукана функція,  $k = (3 - \nu) / (1 + \nu)$ .

Для визначення напружено-деформованого стану пластини будемо мати залежності [3,13,14]

$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi_{IIВ}(z) + \overline{R(z)} + \Phi_{IIТ}(z) + \Omega_{IIТ}(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'_{IIТ}(z)}, \quad (6)$$

$$2\mu \partial_x(u + iv) = k\Phi_{IIВ}(z) - \overline{R(z)} + k\Phi_{IIТ}(z) - \Omega_{IIТ}(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'_{IIТ}(z)}, \quad (7)$$

$$2\mu\partial_t(u+iv) = k\Phi_{PB}(t) - \overline{\Phi_{PB}(t)} - \frac{\overline{dt}}{dt} \left[ t\overline{\Phi'_{PB}(t)} + \overline{\Psi_{PB}(t)} \right] + k\Phi_{PT}(t) - \overline{\Phi_{PT}(t)} - \frac{\overline{dt}}{dt} \left[ t\overline{\Phi'_{PT}(t)} + \overline{\Omega_{PT}(t)} - \overline{\Phi_{PT}(t)} - t\overline{\Phi'_{PT}(t)} \right], \quad (8)$$

де  $\Omega_{PT}(z) = \overline{\Phi_{PT}(z)} + z\overline{\Phi'_{PT}(z)} + \overline{\Psi_{PT}(z)}$ ,  $R(z) = \Phi_{PB}(z) + z\overline{\Phi'_{PB}(z)} + \Psi_{PB}(z)$ .

Перетворивши крайову умову (2)

$$(\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^+ = (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^-, \quad x \in L,$$

та враховуючи (6), отримаємо задачу лінійного спряження

$$(\Phi_{PT}(x) - \Omega_{PT}(x))^+ - (\Phi_{PT}(x) - \Omega_{PT}(x))^- = 0, \quad x \in L,$$

розв'язавши яку, матимемо

$$\Phi_{PT}(z) = \Omega_{PT}(z). \quad (9)$$

На основі залежності (7), врахувавши (9), можна записати

$$\Phi_{PT}^+(x) - \Phi_{PT}^-(x) = iQ(x) = 2\mu(1+k)^{-1} \partial_x [u+iv], \quad x \in L \quad (10)$$

Розв'язавши задачу лінійного спряження (10), одержимо

$$\Phi_{PT}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{Q(u)du}{u-z}. \quad (11)$$

При цьому має виконуватись умова однозначності переміщень при обході контура тріщини

$$\int_L Q(u)du = 0. \quad (12)$$

На основі крайових умов (2) та формули (6) матимемо

$$-N/(2h) = \Phi_{PB}(x) + \overline{R(x)} + \Phi_{PT}^+(x) + \Phi_{PT}^-(x), \quad x \in L.$$

Якщо врахувати (11) та (5), то з попередньої залежності, виділивши дійсну й уявну частини, отримаємо

$$N = -h \operatorname{Re} \left\{ \frac{2}{\pi} \int_L \frac{Q(u)du}{u-x} + \int_{L_1} (K(u,x)Q_1(u)du + M(u,x)\overline{Q_1(u)}d\bar{u}) \right\}, \quad x \in L, \quad (13)$$

$$0 = \text{Im} \left\{ \frac{2}{\pi} \int_L \frac{Q(u) du}{u-x} + \int_{L_1} (K(u,x) Q_1(u) du + M(u,x) \overline{Q_1(u) d\bar{u}}) \right\}, x \in L, \quad (14)$$

де

$$K(u,x) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{u-x} - \frac{\kappa}{\bar{u}-x} \right), \quad M(u,x) = \frac{\bar{u}-u}{\pi(\bar{u}-x)^2}. \quad (15)$$

Задовольняючи крайову умову (1) та враховуючи (5), (8), (11), отримаємо

$$\begin{aligned} & \int_L [L(u,t) Q(u) du + N(u,t) \overline{Q(u) d\bar{u}}] + \\ & + \int_{L_1} [K_1(u,t) Q_1(u) du + M_1(u,t) \overline{Q_1(u) d\bar{u}}] = 0, \quad t \in L_1, \end{aligned} \quad (16)$$

де

$$\begin{aligned} K_1(u,t) &= \frac{k}{2\pi} \left( \frac{1}{u-t} - \frac{\bar{d}t}{dt} \frac{1}{\bar{u}-t} \right), \quad M_1(u,t) = \frac{1}{2\pi} \left( -\frac{1}{\bar{u}-t} - \frac{\bar{d}t}{dt} \frac{t-u}{(\bar{u}-t)^2} \right), \\ L(u,t) &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{k}{u-t} - \frac{\bar{d}t}{dt} \frac{1}{u-t} \right), \quad N(u,t) = \frac{1}{2\pi} \left( -\frac{1}{u-t} - \frac{\bar{d}t}{dt} \frac{t-u}{(u-t)^2} \right). \end{aligned}$$

**Побудова розв'язку задачі згину.** Введемо в розгляд комплексні потенціали  $\Phi_3(z)$  і  $\Psi_3(z)$ , які подамо у вигляді [14]

$$\Phi_3(z) = \Phi_{3B}(z) + \Phi_{3T}(z) + \Gamma, \quad \Psi_3(z) = \Psi_{3B}(z) + \Psi_{3T}(z) + \tilde{\Gamma}', \quad (17)$$

де

$$\Phi_{3B}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} \frac{G_1(u) du}{u-z}, \quad \Psi_{3B}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} \left( \frac{\overline{G_1(u)}}{u-z} d\bar{u} - \frac{\bar{u} G_1(u)}{(u-z)^2} du \right), \quad (18)$$

$G_1(u)$  – невідома шукана функція,

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}, \quad \tilde{\Gamma} = -\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4D(1+\nu)}, \quad \tilde{\Gamma}' = -\frac{1}{2m} (M_y^\infty - M_x^\infty), \quad m = -D(1-\nu).$$

Для визначення напружено-деформованого стану пластини за згину скористаємося залежностями [13, 14]

$$\partial_x g = \Phi_{3T}(z) - \Omega_{3T}(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'_{3T}(z)} + \Phi_{3B}(z) + \overline{R_0(z)} + 2\tilde{\Gamma} + \tilde{\Gamma}', \quad (19)$$

$$f = \tilde{k}\Phi_{3T}(z) + \Omega_{3T}(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'_{3T}(z)} + \tilde{k}\Phi_{3B}(z) - \overline{R_0(z)} + (\tilde{k} - 1)\tilde{\Gamma} - \tilde{\Gamma}', \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial s} - i \frac{\partial w}{\partial n} \right) \frac{dt}{ds} \right] &= \Phi_{3B}(t) + \overline{\Phi_{3B}(t)} + \frac{d\bar{t}}{dt} \left[ t\overline{\Phi'_{3B}(t)} + \overline{\Psi_{3B}(t)} \right] + \Phi_{3T}(t) \\ &+ \overline{\Phi_{3T}(t)} + \frac{d\bar{t}}{dt} \left[ t\overline{\Phi'_{3T}(t)} - \overline{\Phi_{3T}(t)} - \bar{t}\overline{\Phi'_{3T}(t)} - \Omega_{3T}(\bar{t}) \right] + 2\tilde{\Gamma} + \frac{d\bar{t}}{dt}\tilde{\Gamma}', \end{aligned} \quad (21)$$

де  $\Omega_{3T}(z) = -\overline{\Phi_{3T}(z)} - z\overline{\Phi'_{3T}(z)} - \overline{\Psi_{3T}(z)}$ ,  $R_0(z) = \Phi_{3B}(z) + z\overline{\Phi'_{3B}(z)} + \Psi_{3B}(z)$ ,

$$g = \partial_x w + i\partial_y w, \quad f = \left( M_y + i \cdot \int_0^x P(\varepsilon) d\varepsilon + iC'_0 \right) / m, \quad \tilde{k} = (3 + \nu) / (1 - \nu),$$

$C'_0$  – невідома дійсна стала.

З крайової умови (3)

$$f^+ = f^-, \quad x \in L,$$

врахувавши (20), отримаємо задачу лінійного спряження

$$\left( \tilde{k}\Phi_{3T}(x) - \Omega_{3T}(x) \right)^+ - \left( \tilde{k}\Phi_{3T}(x) - \Omega_{3T}(x) \right)^- = 0, \quad x \in L, \quad (22)$$

розв'язавши яку, матимемо

$$\Omega_{3T}(z) = \tilde{k}\Phi_{3T}(z). \quad (23)$$

Введемо позначення

$$\partial_x \left[ \partial_x w + i\partial_y w \right] = (\partial_x g)^+ - (\partial_x g)^- = iG(x)(1 + \tilde{k}), \quad x \in L. \quad (24)$$

Беручи до уваги (23) та (24), з (19) отримаємо задачу лінійного спряження

$$\Phi_{3T}^+(x) - \Phi_{3T}^-(x) = iG(x), \quad (25)$$

розв'язавши яку, матимемо

$$\Phi_{3T}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{G(u) du}{u - z}. \quad (26)$$

Врахувавши (20) і (23), з крайової умови (3) можемо записати

$$\begin{aligned} (M_y + iC'_0) / m &= \tilde{k} \left( \Phi_{3T}^+(x) + \Phi_{3T}^-(x) \right) + \\ &+ (\tilde{k} - 1)\tilde{\Gamma} - \tilde{\Gamma}' + \left[ \tilde{k}\Phi_{3B}(x) - \overline{R_0(x)} \right], \quad x \in L. \end{aligned} \quad (27)$$

Беручи до уваги (18) і (26), на основі (27) отримаємо

$$M_y = \operatorname{Re} \left\{ a_1 \int_L \frac{G(u)du}{u-x} + \int_{L_1} [K_3(u,x)G_1(u)du + M_3(u,x)\overline{G_1(u)}d\bar{u}] \right\} + a_2, \quad (28)$$

$$C'_0 = \operatorname{Im} \left\{ a_1 \int_L \frac{G(u)du}{u-x} + \int_{L_1} [K_3(u,x)G_1(u)du + M_3(u,x)\overline{G_1(u)}d\bar{u}] \right\}, \quad (29)$$

де

$$K_3(u,x) = \frac{m}{2\pi} \left( \frac{\tilde{k}}{u-x} - \frac{1}{u-x} \right), \quad M_3(u,x) = mM(u,x), \quad (30)$$

$$a_1 = m\tilde{k} / \pi, \quad a_2 = m(\tilde{\Gamma}(\tilde{k}-1) - \tilde{\Gamma}').$$

При цьому мають виконуватися умови однозначності кутів повороту та прогину при обході контура тріщини

$$\int_L G(u)du = 0, \quad \operatorname{Im} \left\{ \int_L uG(u)du \right\} = 0. \quad (31)$$

Задовольняючи крайову умову (1) та враховуючи (18), (23) і (26), з (21) матимемо

$$\begin{aligned} 0 = & \int_L [L_3(u,t)G(u)du + N_3(u,t)\overline{G(u)}d\bar{u}] + \\ & + \int_{L_1} [K_{13}(u,t)G_1(u)du + M_{13}(u,t)\overline{G_1(u)}d\bar{u}] + \tilde{D}, t \in L_1, \end{aligned} \quad (32)$$

де

$$\begin{aligned} K_{13}(u,t) &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{u-t} + \frac{\overline{dt}}{dt} \frac{1}{\bar{u}-\bar{t}} \right), \quad M_{13}(u,t) = -M_1(u,t), \\ L_3(u,t) &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{u-t} - \frac{\overline{dt}}{dt} \frac{\tilde{k}}{u-\bar{t}} \right), \quad N_3(u,t) = -N(u,t), \quad \tilde{D} = 2\tilde{\Gamma} + \frac{\overline{dt}}{dt} \tilde{\Gamma}'. \end{aligned}$$

Задовольняючи умову (3)  $M_y = \beta N$ ,  $x \in L$ , та враховуючи (13) і (28), отримаємо

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left\{ a_1 \int_L \frac{G(u)du}{u-x} + \int_{L_1} [K_3(u,x)G_1(u)du + M_3(u,x)\overline{G_1(u)}d\bar{u}] \right\} + a_2 = \\ & = -\beta h \operatorname{Re} \left\{ \frac{2}{\pi} \int_L \frac{Q(u)du}{u-x} + \int_{L_1} [K(u,x)Q_1(u)du + M(u,x)\overline{Q_1(u)}d\bar{u}] \right\}. \end{aligned} \quad (33)$$

З другої крайової умови (4), беручи до уваги механічний зміст функцій  $G(x)$  та  $Q(x)$ , отримуємо

$$\operatorname{Re}Q(x) + \tilde{\alpha} \operatorname{Re}G(x) = 0, \quad (34)$$

де  $\tilde{\alpha} = 2\mu\alpha h(1+\nu)/(1-\nu)$ .

Отже, розв'язок задачі звівся до системи рівнянь (12), (15), (16), (29), (31) – (34), яку будемо розв'язувати числово, методом механічних квадратур [12,14], причому функції  $G(u)$  і  $Q(u)$  будемо шукати у вигляді

$$G(u) = \frac{\tilde{G}(u)}{\sqrt{(d+l-u)(d-l-u)}}, \quad Q(u) = \frac{\tilde{Q}(u)}{\sqrt{(d+l-u)(d-l-u)}}.$$

Зведені коефіцієнти інтенсивності зусиль  $K_j^*$  (КІЗ) та моментів  $K_{j3}^*$  (КІМ) будемо шукати за формулами [12, 4]

$$\frac{(K_{13}^\pm - iK_{23}^\pm)h}{M_y^\infty \sqrt{l}} = K_{13}^{*\pm} - iK_{23}^{*\pm} = \pm \frac{2}{3} \frac{3+\nu}{1-\nu^2} u_1(\pm 1),$$

$$\frac{K_1^\pm - iK_2^\pm}{M_y^\infty \sqrt{l}} = K_1^{*\pm} - iK_2^{*\pm} = \mp u_2(\pm 1), \quad (35)$$

де

$$\begin{pmatrix} u_1(1) \\ u_2(1) \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (-1)^{m+1} \begin{pmatrix} G_{1m} \\ Q_{1m} \end{pmatrix} \operatorname{ctg} \left( \frac{2m-1}{4M} \pi \right), \quad \begin{pmatrix} u_1(-1) \\ u_2(-1) \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (-1)^{m+M} \begin{pmatrix} G_{1m} \\ Q_{1m} \end{pmatrix} \operatorname{tg} \left( \frac{2m-1}{4M} \pi \right),$$

$$Q_{1m} = \tilde{Q}(d+lt_m)h^2 / M_y^\infty, G_{1m} = Eh^3 \tilde{G}(d+lt_m) / M_y^\infty, t_m = \cos \left( \frac{(2m-1)\pi}{2M} \right),$$

$G_{1m}, Q_{1m} (m=1, M)$  – шукані розв'язки отриманої вище системи лінійних алгебраїчних рівнянь. В силу симетрії задачі відносно осі  $Ox$  маємо, що  $K_{23}^{*\pm} = K_2^{*\pm} = 0$ .

Зауважимо, що існує залежність

$$K_1^{*\pm} = \frac{3(1+\nu)}{3+\nu} \alpha K_{13}^{*\pm}.$$

Критичний момент  $\tilde{M} = M_y^\infty \sqrt{\pi l / (2\gamma_* E)} / (2h^2)$  старту росту тріщини знайдемо за формулою [7,19,23]

$$\tilde{M} = \frac{3+\nu}{\sqrt{3(1+\nu)(3\alpha^2(1+\nu)+3+\nu)}} \min \{ K_{13}^* \}^{-1},$$



де  $\gamma_*$  – густина активної поверхневої енергії матеріалу пластини.

**Числовий аналіз та висновки.** Числовий аналіз проведено при  $\gamma = 0,13$  [21],  $\nu = 0,3$ .

Скористаємося конформним відображенням зовнішності квадрата на зовнішність одиничного кола [13]

$$z = \omega(\varepsilon) = a\left(\varepsilon + \tilde{m} / \varepsilon^3\right), \quad a > 0, \quad \tilde{m} = -1/9,$$

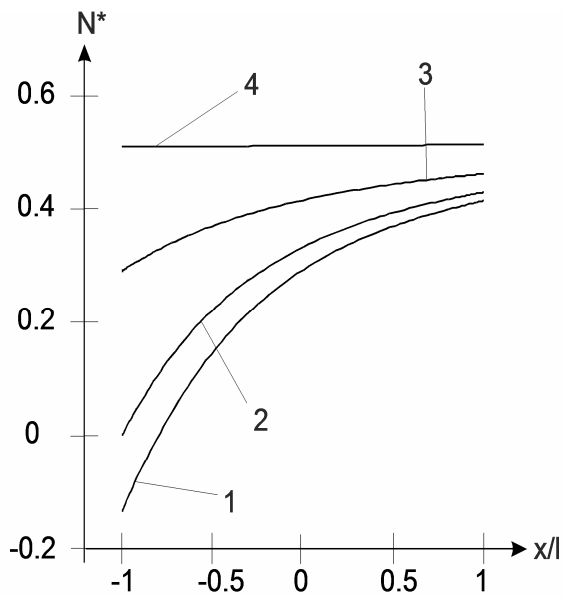
$$\varepsilon = 1, \quad z = a\left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{8}{9}a.$$

На рис.2 наведено графічну залежність зведеного контактного зусилля  $N^* = hN/M_y^\infty$  між берегами тріщини від безрозмірної координати  $\xi = x/l$  при різних  $\tilde{x} = d/l$  та при  $\chi = M_x^\infty / M_y^\infty = 1,2$ ,  $r = a/l = 1$ . Причому кривим 1,2,3,4 відповідає відстань між жорстким включенням та тріщиною  $\tilde{x}$  відповідно 2.01, 2.23, 3, 10. Зауважимо, що при  $\tilde{x} < 2.23$  відбувається відставання берегів тріщини у вершині А. Величина зведеного контактного зусилля  $N^*$  у ближній вершині А ( $\xi = -1$ ) є меншою, ніж у далекій вершині В ( $\xi = 1$ ). Також бачимо, що при збільшенні відстані між жорстким включенням і тріщиною величина контактного зусилля прямує до константи 0.521 [7].

На рис.3 наведено графічну залежність зведеного контактного зусилля  $N^*$  між берегами тріщини від безрозмірної координати  $\xi$  при різних  $\chi$  та при  $\tilde{x} = 2.5$ ,  $r = 1$ . Причому кривим 1,2,3,4,5 відповідає відношення згинальних моментів на нескінченності  $\chi$  відповідно 0.2, 0.5, 1, 1.4, 2. Як бачимо з цього рисунка, при  $\chi > 1.4$  відбувається відставання берегів тріщини у вершині А. Також бачимо, що при  $\chi < 0.65$  зведене контактне зусилля спадає зі збільшенням безрозмірної координати  $\xi = x/l$ , а при  $\chi < 0.65$  – зростає.

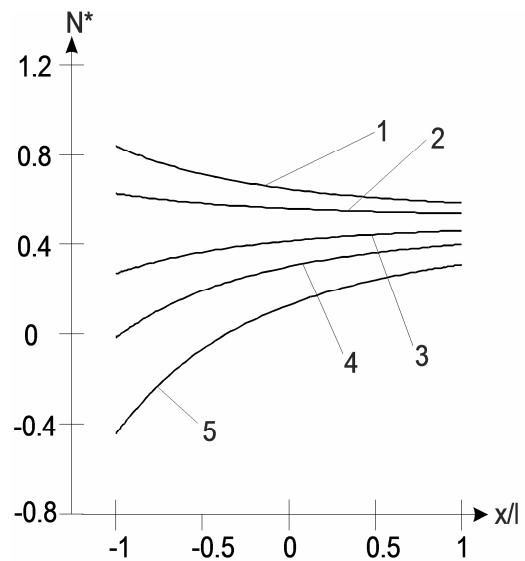
На рис.4 наведено графічні залежності зведених коефіцієнтів інтенсивності моментів (КІМ)  $K_{13} / (M_y^\infty \sqrt{l}) = K_{13}^*$  від відношення відстані між центрами тріщини та включення  $\tilde{x} = d/l$ . Криві 1–3 побудовані при  $\tilde{k}$ , що дорівнює відповідно 0.2, 1, 1.35 та  $r = 1$ . Причому суцільні лінії відповідають КІМ у ближній до включення вершині тріщини, штрихові – у далекій. Як бачимо з рис.4 КІМ у ближній вершині менший ніж у далекій, коли  $\chi > 0.65$ , і навпаки, зауважимо, що при збільшенні відстані між тріщиною та включенням числові значення КІМ прямують до відповідної величини в однорідній пластині [7].

На рис.5 наведено графічні залежності зведених (КІМ) від відношення половини сторони квадрата до половини довжини тріщини  $r = a/l$ . Криві 1–3 побудовані при  $\tilde{k}$ , що дорівнює відповідно 0.2, 0.5, 1 та при  $\tilde{x} = 2.5$ , причому суцільні лінії відповідають КІМ у ближній до включення вершині тріщини, штрихові – у далекій. Як бачимо з рис.5, КІМ у ближній вершині менший ніж у далекій, коли  $\chi > 0.65$ , і навпаки – коли  $\chi < 0.65$ . З цього рисунка бачимо, що при зменшенні розмірів жорсткого включення значення КІМ у ближній і далекій вершині однакові й рівні 0.521, що відповідає випадку ізольованої тріщини.



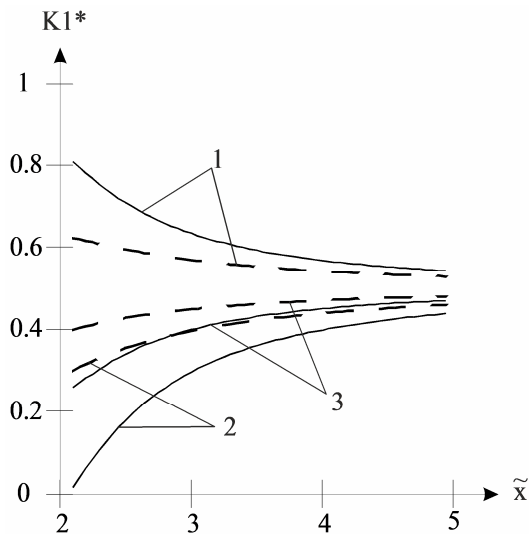
**Рисунок 2.** Графічна залежність зведеного контактного зусилля при різних  $\tilde{x} = d/l$

**Figure 2.** Graphic dependence of the consolidated contact force at different  $\tilde{x} = d/l$



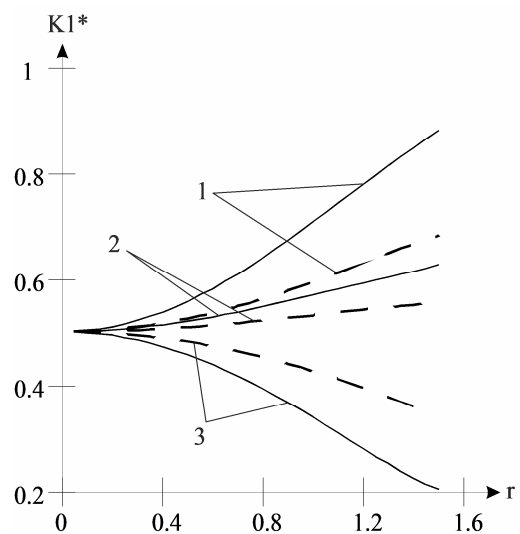
**Рисунок 3.** Графічна залежність зведеного контактного зусилля при різних  $\chi = M_x^\infty / M_y^\infty$

**Figure 3.** Graphic dependence of the consolidated contact force at different  $\chi = M_x^\infty / M_y^\infty$



**Рисунок 4.** Графічні залежності КІМ при різних  $\chi$

**Figure 4.** Graphic dependencies of SIF moments at different  $\chi$



**Рисунок 5.** Графічні залежності КІМ при різних  $\chi$

**Figure 5.** Graphic dependence of SIF moments at different  $\chi$

На рис.6 зображено графічні залежності критичного моменту між жорсткою шайбою та тріщиною, коли  $\chi < 0.65$ , критичний момент спадає, а при  $\chi > 0.65$  – зростає. При  $\chi < 0.65$  тріщина підростає із ближньої вершини, а при  $\chi > 0.65$  – з далекої. При збільшенні  $\tilde{x}$  критичний момент прямує до 1.32, що відповідає ізольованій тріщині.

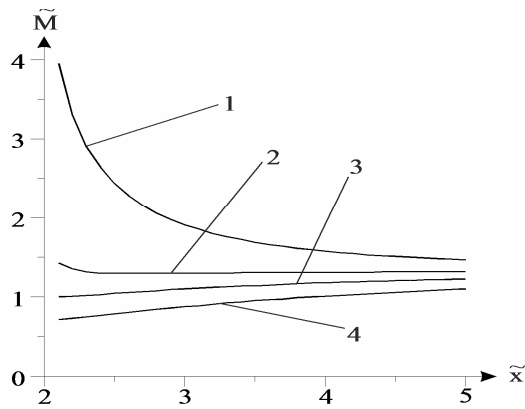


Рисунок 6. Графічна залежності критичного моменту при різних  $\chi$

Figure 6. Graphic dependence of critical moments at various  $\chi$

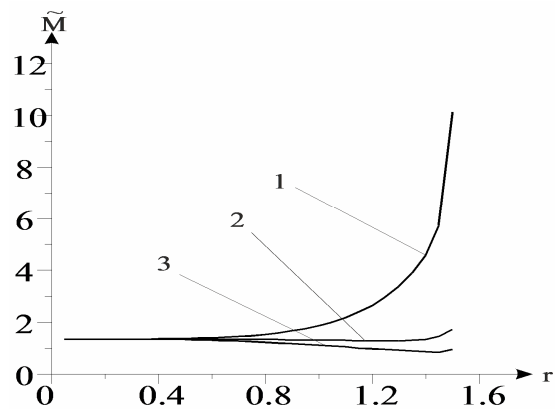


Рисунок 7. Графічна залежності критичного моменту при різних  $\chi$

Figure 7. Graphic dependence of critical moments at various  $\chi$

На рис.7 зображено графічні залежності критичного моменту  $\tilde{M}$  від  $r = a/l$ . Криві 1–3 побудовано при відношенні згинальних моментів на нескінченності  $\chi = M_x^\infty / M_y^\infty$ , що дорівнює 0.4, 0.7, 1 відповідно та  $\tilde{x} = 3.1$ . Як бачимо з рис.7, при збільшенні розмірів жорсткої шайби, коли  $\chi < 0.65$ , критичний момент зростає, а при  $\chi > 0.65$  – спадає. При  $\chi < 0.65$  тріщина підростає із далекої вершини, а при  $\chi > 0.65$  – з ближньої. При малих розмірах жорсткого включення критичний момент дорівнює 1.32, що відповідає випадку ізольованої тріщини.

**Висновки.** На основі числового аналізу встановлено такі закономірності: величина контактної зусилля є більшою у ближній вершині, ніж у далекій, а при віддаленні тріщини від шайби контактне зусилля та зведений КІМ виходить на сталі значення для однієї тріщини. Критичний момент зростає при збільшенні відстані між включенням та тріщиною у дослідженому випадку при  $\chi < 0.65$ , і навпаки, при  $\chi > 0.65$ , при  $\chi > 0.65$  тріщина підростає із далекої вершини, а при  $\chi < 0.65$  – з ближньої.

**Conclusions.** Based on numerical analysis the following laws were stated: the value of the contact force is larger near the top than in the distant, and at a distance from the split washers, contact forces and a combined intensity factor moments goes to the constant value of a single crack; critical time increases with the distance between the inclusion and crack in the investigated case  $\chi < 0.65$ , and vice versa, when  $\chi > 0.65$ , when  $\chi > 0.65$  the crack grows from distant peaks, and if  $\chi < 0.65$  - with their neighbors.

#### Список використаної літератури

1. Звізло, І. Двовісний згин моментами на нескінченності кусково-однорідної пластини з прямолінійною тріщиною з урахуванням контакту її берегів [Текст] / І. Звізло // Вісник Львівського університету. Серія мех. -мат. – 2008. – Вип. 69. – С. 210–218.
2. Кальтгоф, Дж.Ф. Експериментальне підтвердження контакту берегів тріщини при згині пластини [Текст] / Дж. Ф. Кальтгоф, І. П. Шацький, А. Бюргель // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій. – Вип. 2: В 3-х т. ; за заг. ред. В. В. Панасюка. – Львів: Каменяр. – 1999. – Т. 1. – С. 72–74.
3. Мусхелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости [Текст] / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 708 с.
4. Опанасович, В. К. Двосторонній згин кусково-однорідної ізотропної пластини з коловою межею поділу матеріалів та радіальною тріщиною з врахуванням контакту берегів [Текст] / В. К. Опанасович,

І. С. Звізло // Зб. наук. праць: «Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій». – Львів: Каменяр. – Вип. 8. – 2009. – С. 63–78.

5. Опанасович, В. К. Двовісний згин безмежної пластини з абсолютно жорсткою шайбою та тріщиною, береги якої контактують [Текст] / В. К. Опанасович, М. С. Слободян // Вісник Львівського державного університету архітектури і сільськогосподарського будівництва. – 2007. – №8. – С. 75–87.

6. Опанасович, В. К. Двовісний згин кусково-однорідної ізотропної пластини з прямолінійною межею поділу матеріалів і з двома перпендикулярними тріщинами з врахуванням контакту берегів [Текст] / В. К. Опанасович, І. С. Звізло, І. М. Яцик // Вісник Дніпропетровського університету. – 2007. – Механіка. – Вип. 11, Том 2, №22. – С. 141–148.

7. Опанасович, В. К. Згин пластини з наскрізною тріщиною з врахуванням ширини області контакту її поверхонь [Текст] / В. К. Опанасович // Міжвузівський збірник «Наукові нотатки». – 2007. – Вип. 20(2). – С. 123–127.

8. Опанасович, В. К. Двовісний згин пластини з круговим отвором і двома радіальними тріщинами, береги яких контактують [Текст] / В. К. Опанасович, М. С. Слободян // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2006. – Т. 49, №3. – С. 106–119.

9. Опанасович, В. К. Двосторонній згин пластини з круговим отвором та тріщиною з врахуванням контакту її берегів [Текст] / В. К. Опанасович, М. С. Слободян // Вісник Донецького університету. Серія А: Природничі науки. – 2005. – Вип. 1. – С. 85–89.

10. Опанасович, В. К. Двосторонній згин пластини з круговим отвором та тріщиною з врахуванням контакту її берегів [Текст] / В. К. Опанасович, М. С. Слободян // Вісник Донецького університету. Серія А: Природничі науки. – 2005. – Вип. 1. – С. 85–89.

11. Опанасович, В. К. Згин ізотропної пластини з еліптичним отвором та тріщиною з врахуванням ширини області контакту її берегів [Текст] / В. К. Опанасович, М. С. Слободян, В. Я. Бедрій // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2012. – Вип. 20. – С. 274–280.

12. Панасюк, В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках [Текст] / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацьшин. – К. : Наук. думка, 1976. – 444 с.

13. Прусов, И. А. Метод сопряжения в теории плит [Текст] / И. А. Прусов. – Минск: Изд-во Беларус. ун-та, 1975. – 256 с.

14. Саврук, М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами [Текст] / М. П. Саврук. – Киев: Наук. думка., 1988. – 324 с.

15. Сулим, Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями [Текст] / Г. Т. Сулим. – Львів, 2007. – 716 с.

16. Шацький, І. П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами [Текст] / І. П. Шацький // Доповіді АН УРСР. Серія А. Фізико-математичні та технічні науки. – 1988. – №7. – С. 49–51.

17. Шацький, І. П. Развитие модели контакта берегов трещины в изгибаемой пластине [Текст] / И. П. Шацкий // Теоретическая и прикладная механика. – 2000. – №31. – С. 91–97.

18. Яцик, І. Згин пластини Рейсснера з періодичною системою наскрізних колінеарних тріщин з врахуванням ширини області контакту їхніх берегів [Текст] / І. Яцик // Вісник Львівського університету. Сер. мех. -мат. – 2010. – Вип. 73. – С. 155–164.

19. Alan, T. Zehder. Fracture mechanics of thin, cracked plates under tension, bending and out-of-plane shear loading [Text] / Alan T. Zehder // International journal of fracture. – 1995. – Vol. 72. – P. 21–28.

20. Alwar, R. S. Three-dimensional finite element analysis of cracked thick plates in bending [Text] / R. S. Alwar // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1983. – Vol. 19. – P. 293–303.

21. Dempsey, J. P. Closure of a through crack in a plate under bending [Text] / J. P. Dempsey, I. I. Shekhtman, L. L. Slepian // International Journal of Solids and Structures. – 1998. – Vol. 35. – P. 4077–4089.

22. Dirgantara, T. Stress intensity factors for cracks in thin plates [Text] / T. Dirgantara, M. H. Aliabadi // Engineering Fracture Mechanics. – 2002. – Vol. 69. – P. 1465–1486.

23. Simkins, D. C. Effective bending stiffness for plates with microcracks [Text] / D. C. Simkins, S. Li // Archive of Applied Mechanics. – 2003. – Vol. 73. – P. 282–309.

24. Slepian, L. I. Asymptotic solutions for crack closure in an elastic plate under combined extension and bending [Text] / L. I. Slepian // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1995. – Vol. 43. – P. 1727–1749.

25. Su R. K. L., Sun H. Y. Numerical solution of crack thin plates subjected to bending, twisting and shear loads [Text] / R. K. L. Su, H. Y. Sun // International Journal of Fracture. – 2002. – Vol. 117. – P. 323–335.

26. Young, M. Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates [Text] / M. Young, C. Sun // International Journal of Fracture. – 1992. – Vol. 55. – P. 81–93.

27. Zehnder, A. T. Fracture mechanics of thin plates and shells under combined membrane, bending, and twisting loads [Text] / A. T. Zehnder // Applied Mechanics Reviews. – 2005. – Vol. 58. – P. 37–48.

28. Zucchini, A., Hui C. Y., Zehnder A. T. Crack tip stress fields for thin plates in bending, shear and twisting: A comparison of plate theory and three dimensional elasticity theory [Text]/ A. Zucchini, C. Y. Hui, A. T. Zehnder // International Journal of Fracture. – 2000. – Vol. 104. – P. 387–407.

*Отримано 11.03.2015*