

Дудик М. В. Особливості локального поля напружень біля вершини тріщини, що виходить з кутової точки межі поділу матеріалів / Михайло Володимирович Дудик, Володимир Михайлович Феньків // Вісник ТНТУ, — Т. : ТНТУ, 2015. — Том 79. — № 3. — С. 61-70. — (Механіка та матеріалознавство).

УДК 539.375

М. Дудик, канд. фіз.-мат. наук; В. Феньків

Уманський державний педагогічний університет

## ОСОБЛИВОСТІ ЛОКАЛЬНОГО ПОЛЯ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ВЕРШИНИ ТРІЩИНИ, ЩО ВИХОДИТЬ З КУТОВОЇ ТОЧКИ МЕЖІ ПОДІЛУ МАТЕРІАЛІВ

**Резюме.** В умовах плоскої деформації за допомогою методу розвинень за власними функціями виконано розрахунок напружено-деформованого стану біля вершини тріщини, яка виходить у довільному напрямку з кутової точки ламаної межі поділу двох різних матеріалів. Досліджено вплив кута зламу межі поділу, орієнтації тріщини і пружних параметрів з'єднаних матеріалів на показник сингулярності в околі вершини. Виявлено існування параметрів задачі, при яких передбачається контакт берегів, та встановлено умови допустимості використання відповідного розв'язку.

**Ключові слова:** кутова точка межі поділу матеріалів, тріщина довільної орієнтації, показник сингулярності напружень.

M. Dudyk, V. Fen'kiv

## PECULIARITIES OF THE LOCAL STRESSES FIELD NEAR THE CRACK TIP WHICH GOES OUT FROM THE ANGULAR POINT OF THE BROKEN INTERFACE

**Summary.** The homogeneous problem of the elasticity theory about the stress-strain state of piece-homogeneous body near the tip of the semi-infinity crack of arbitrary orientation under the plane strain is considered. The crack tip coincides with the corner point of the broken interface of two different isotropic elastic media. The ideal joint on the interface is supposed. Using the Wieghardt - Williams formulas of the expansion of the stresses near the tip of homogeneous wedge in terms of its own functions, the formulated static boundary problem of the elastic theory is reduced to the system of algebraic equations for unknown coefficients of the expansion. A characteristic equation of the problem, the roots of which determine the degrees of distance to the tip in the expansion of the asymptotic field of stresses and displacements near the crack tip, is derived from the condition of non-triviality of the desired solution. The analytical expressions for the calculation of the expansion coefficients are found.

The numerical analysis of the roots of the characteristic equation of the problem for some elastic parameters of the joined materials, the crack orientation and the interfacial angles reveal the presence of values with negative real part among them – the singularity index, which stipulates the stress concentration at approaching to the crack tip. It is discovered that the singular behaviour of stresses near the crack tip differs from the root. Physically incorrect spatial oscillations stipulated by the presence of imaginary part in the index of singularity superimpose on the power singularity of stresses in some interval of interfacial angles depended on the elastic parameters of the joined materials and the crack orientation. It is supposed that the formation of the contact area of crack lips corresponds to this situation. The expression for the crack opening near the tip was found and the possible contact zone sizes were estimated. On the basis of this expression the condition of correctness of the found problem solution was formulated. The received results can be used for the estimation of the fracture toughness of piece-homogeneous body with an arbitrary orientation crack, which goes out from the corner point of the broken interface.

**Key words:** corner point of the broken interface, crack of arbitrary orientation, stress singularity index.

**Вступ.** Широке використання у будівництві, техніці та інших галузях промислового виробництва композитів, клеєних і зварних з'єднань тощо, які мають кусково-неоднорідну структуру і містять різноманітні концентратори напружень у вигляді вирізів, тріщин та інших дефектів, породжує підвищений інтерес до аналізу

процесів руйнування композитних матеріалів. Математичне моделювання таких процесів у структурно-неоднорідних середовищах є актуальною проблемою механіки руйнування матеріалів. При цьому переважна більшість досліджень стосуються тріщин, розташованих на межі поділу двох різних матеріалів. Значно менше робіт присвячено тріщинам, що виходять на межу поділу матеріалів. Зокрема, в [1–8] розглядається тріщина, що виходить на плоску межу поділу під довільним кутом, а в [9–11] досліджені симетричні задачі про тріщину, що поширюється з кутової точки ламаної межі поділу матеріалів уздовж бісектриси кута. Їх частинним випадком є роботи [12–15] про тріщину, перпендикулярну до межі поділу. Разом з тим, значний інтерес викликає розв’язання більш загальної несиметричної задачі про напружено-деформований стан в околі вершини тріщини, що виходить в один з матеріалів з кутової точки межі поділу двох тіл у довільному напрямку.

**Метою роботи** є знаходження полів напружень і переміщень в околі вершини кута ламаної межі поділу двох пружних матеріалів, з якої у довільному напрямку виходить тріщина, та дослідження залежності особливостей напружено-деформованого стану від характеристик з’єднаних тіл.

**Постановка задачі.** В умовах плоскої деформації розглянемо статичну однорідну задачу теорії пружності про поле напружень в околі кутової точки ламаної межі поділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів з модулями Юнга  $E_1, E_2$  ( $E_1 \neq E_2$ ) і коефіцієнтами Пуассона  $\nu_1, \nu_2$ , з якої у довільному напрямку виходить прямолінійна півнескінченна тріщина (рис. 1). На межі поділу матеріалів уздовж ліній  $\theta = 0$  і  $\theta = \alpha$  припускається ідеальне зчеплення. Береги тріщини вважаємо вільними від навантажень. Тоді для напружень і зміщень мають місце наступні граничні умови:

$$\begin{aligned} \theta = 0: \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_r \rangle = \langle u_\theta \rangle = 0; \\ \theta = \alpha: \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0; \\ \theta = \alpha + \gamma \cup -\beta: \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\langle f \rangle$  позначає стрибок величини  $f$  на відповідній лінії.

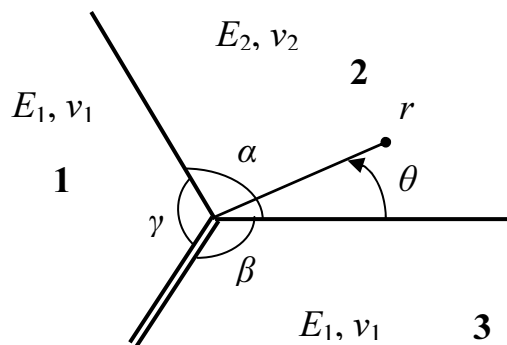


Рисунок 1. Розрахункова схема задачі

Figure 1. The calculation scheme of the problem

**Побудова розв’язку задачі.** Використовуючи формули Вігхардта-Вільямса розвинень за власними функціями поля напружень біля вершини однорідного клина [16 – 17], подамо шукані напруження і похідні переміщень у вигляді

$$\tau_{r\theta} = \sum_s r^{\lambda_s} f_1^{(s)}(\theta), \quad \sigma_\theta = \sum_s r^{\lambda_s} f_2^{(s)}(\theta), \quad \sigma_r = \sum_s r^{\lambda_s} f_3^{(s)}(\theta),$$

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} = -\frac{1+\nu_i}{E_i} \sum_s \frac{\lambda_s r^{\lambda_s-1}}{\lambda_s+2} f_4^{(s)}(\theta), \quad \frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{1+\nu_i}{E_i} \sum_s \frac{r^{\lambda_s}}{\lambda_s+2} f_5^{(s)}(\theta), \quad (2)$$

$$f_1^{(s)}(\theta) = -a_{1s}^i \cos(\lambda_s+2)\theta - a_{2s}^i \frac{\lambda_s}{\lambda_s+2} \cos \lambda_s \theta + a_{3s}^i \sin(\lambda_s+2)\theta + a_{4s}^i \frac{\lambda_s}{\lambda_s+2} \sin \lambda_s \theta,$$

$$f_2^{(s)}(\theta) = a_{1s}^i \sin(\lambda_s+2)\theta + a_{2s}^i \sin \lambda_s \theta + a_{3s}^i \cos(\lambda_s+2)\theta + a_{4s}^i \cos \lambda_s \theta,$$

$$f_3^{(s)}(\theta) = -a_{1s}^i \sin(\lambda_s+2)\theta - a_{2s}^i \frac{\lambda_s-2}{\lambda_s+2} \sin \lambda_s \theta - a_{3s}^i \cos(\lambda_s+2)\theta - a_{4s}^i \frac{\lambda_s-2}{\lambda_s+2} \cos \lambda_s \theta,$$

$$f_4^{(s)}(\theta) = a_{1s}^i (\lambda_s+2) \cos(\lambda_s+2)\theta + a_{2s}^i (\lambda_s+1+\kappa_i) \cos \lambda_s \theta - a_{3s}^i (\lambda_s+2) \sin(\lambda_s+2)\theta - a_{4s}^i (\lambda_s+1+\kappa_i) \sin \lambda_s \theta,$$

$$f_5^{(s)}(\theta) = a_{1s}^i (\lambda_s+2) \sin(\lambda_s+2)\theta + a_{2s}^i (\lambda_s+1-\kappa_i) \sin \lambda_s \theta + a_{3s}^i (\lambda_s+2) \cos(\lambda_s+2)\theta + a_{4s}^i (\lambda_s+1-\kappa_i) \cos \lambda_s \theta,$$

де  $a_{js}^i$ ,  $\lambda_s$  – невідомі сталі, які визначаються в ході розв’язування задачі ( $j=1 \div 4$ ; індекс  $i=1$  для  $\alpha \leq \theta < \alpha + \gamma$ ,  $i=2$  для  $0 \leq \theta < \alpha$ ,  $i=3$  для  $-\beta \leq \theta < 0$ ; нумерує  $\lambda_s$  у порядку зростання;  $\kappa_1 = \kappa_3 = 3 - 4\nu_1$ ,  $\kappa_2 = 3 - 4\nu_2$  – сталі Колосова.

Після підстановки (2) в граничні умови (1) завдання зводиться до розв’язання системи 12 лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно  $a_{js}^i$ , нетривіальний розв’язок якої вимагає рівності нулю її детермінанта. Громіздкий розрахунок детермінанта призводить до характеристичного рівняння задачі для визначення сукупності показників  $\lambda_s$  у розвиненнях (2), яке має вигляд:

$$D(\lambda) = 0, \quad (3)$$

$$D(\lambda) = [\delta_{43}\delta_{34} - \delta_{44}\delta_{33}] \Delta_1 + [\delta_{44}\delta_{32} - \delta_{42}\delta_{34}] \Delta_2 + [\delta_{43}\delta_{32} - \delta_{42}\delta_{33}] \Delta_3 +$$

$$+ [\delta_{41}\delta_{33} - \delta_{43}\delta_{31}] \Delta_4 + [\delta_{41}\delta_{34} - \delta_{44}\delta_{31}] \Delta_5 + [\delta_{42}\delta_{31} - \delta_{41}\delta_{32}] \Delta_6,$$

$$\Delta_1 = -(1-p_1)(1+p_3)[(\lambda+1)\sin 2\beta - \sin 2(\lambda+1)\beta];$$

$$\Delta_2 = -4(\lambda+1)^2 \sin^2 \beta + 2p_3 \cos 2(\lambda+1)\beta + p_3^2 + 1;$$

$$\Delta_3 = (\lambda+2)[(\lambda+1+p_3)(\lambda+1-p_2) + \lambda(\lambda+1+p_1)] - (\lambda+1)[(\lambda+2)(\lambda+1-p_2) +$$

$$+(\lambda+1+p_1)(\lambda+1+p_3)] \cos 2\beta - [(2\lambda+2+p_1)p_3 + p_2] \cos 2(\lambda+1)\beta;$$

$$\Delta_4 = \lambda(\lambda+2)[2(\lambda+1)^2 - p_1^2 - p_2^2] - 2[(\lambda+1)^2 p_3 - p_1 p_2] \cos 2(\lambda+1)\beta -$$

$$-(\lambda+1)[\lambda(\lambda+1+p_1)(\lambda+1+p_2) + (\lambda+2)(\lambda+1-p_1)(\lambda+1-p_2)] \cos 2\beta;$$

$$\Delta_5 = -\lambda[(\lambda+1+p_2)(\lambda+1-p_3) + (\lambda+2)(\lambda+1-p_1)] + (\lambda+1)[\lambda(\lambda+1+p_2) +$$

$$+(\lambda+1-p_1)(\lambda+1-p_3)] \cos 2\beta + [(2\lambda+2-p_1)p_3 - p_2] \cos 2(\lambda+1)\beta;$$

$$\Delta_6 = (1-p_1)(1+p_3)[(\lambda+1)\sin 2\beta + \sin 2(\lambda+1)\beta];$$

$$\delta_{31} = p_3 \sin(\lambda+2)(\alpha+\gamma) - (\lambda+1)\sin(\lambda+2)(\alpha-\gamma) + (\lambda+2)\sin[(\lambda+2)\alpha - \lambda\gamma];$$

$$\delta_{32} = 2(\lambda+1)(\lambda+2)\sin \gamma \cos[(\lambda+1)\gamma - \lambda\alpha] - 2(\lambda+1+p_2)\cos \lambda\alpha \sin(\lambda+2)\gamma +$$

$$+(\lambda+2)\{p_1 \sin \lambda(\alpha+\gamma) + p_2 \sin[(\lambda+2)\gamma + \lambda\alpha]\};$$

$$\begin{aligned} \delta_{33} &= p_3 \cos(\lambda + 2)(\alpha + \gamma) - (\lambda + 1) \cos(\lambda + 2)(\alpha - \gamma) + (\lambda + 2) \cos[(\lambda + 2)\alpha - \lambda\gamma]; \\ \delta_{34} &= 2(\lambda + 1)(\lambda + 2) \sin \gamma \sin[(\lambda + 1)\gamma - \lambda\alpha] + 2(\lambda + 1 + p_2) \sin \lambda\alpha \sin(\lambda + 2)\gamma + \\ &\quad + (\lambda + 2) \{ p_1 \cos \lambda(\alpha + \gamma) + p_2 \cos[(\lambda + 2)\gamma + \lambda\alpha] \}; \\ \delta_{41} &= p_3 \cos(\lambda + 2)(\alpha + \gamma) + (\lambda + 1) \cos(\lambda + 2)(\alpha - \gamma) - \lambda \cos[(\lambda + 2)\alpha - \lambda\gamma]; \\ \delta_{42} &= \lambda p_1 \cos \lambda(\alpha + \gamma) - 2(\lambda + 1 + p_2) \cos \lambda\alpha \cos(\lambda + 2)\gamma + p_2(\lambda + 2) \cos[(\lambda + 2)\gamma + \lambda\alpha] + \\ &\quad + (\lambda + 1) \{ (\lambda + 2) \cos[(\lambda + 2)\gamma - \lambda\alpha] - \lambda \cos[\lambda(\alpha - \gamma)] \}; \\ \delta_{43} &= p_3 \sin(\lambda + 2)(\alpha + \gamma) - (\lambda + 1) \sin(\lambda + 2)(\alpha - \gamma) + \lambda \sin[(\lambda + 2)\alpha - \lambda\gamma]; \\ \delta_{44} &= -\lambda p_1 \sin \lambda(\alpha + \gamma) + (\lambda + 1) [(\lambda + 2) \sin((\lambda + 2)\gamma - \lambda\alpha) + \lambda \sin \lambda(\alpha - \gamma)] - \\ &\quad - p_2(\lambda + 2) \sin[(\lambda + 2)\gamma + \lambda\alpha] + 2(\lambda + 1 + p_2) \sin \lambda\alpha \cos(\lambda + 2)\gamma; \\ p_1 &= \frac{1 + e\kappa_2}{1 - e}, p_2 = \frac{\kappa_1 - e\kappa_2}{1 - e}, p_3 = \frac{\kappa_1 + e}{1 - e}, e = \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1} \frac{E_1}{E_2} \quad (e \neq 1). \end{aligned}$$

Для забезпечення регулярної поведінки переміщень при наближенні до вершини тріщини з сукупності всіх можливих коренів  $\lambda_s$  рівняння (3) відкидаємо ті, що задовольняють умову  $\text{Re } \lambda_s \leq -1$ . Для кожного із залишених коренів, приймаючи  $a_{4s}^2$  відомим і рівним  $C_s$ , знаходимо з вихідної системи лінійних однорідних рівнянь усі коефіцієнти  $a_{js}^i$  у розвиненнях (2):

$$\begin{aligned} a_{4s}^2 &= C_s; \tag{4} \\ a_{3s}^2 &= \frac{\Delta_7(\lambda_s) \cdot \Delta_3(\lambda_s) - \Delta_8(\lambda_s) \cdot \Delta_1(\lambda_s)}{\Delta_9(\lambda_s) \cdot \Delta_1(\lambda_s) - \Delta_2(\lambda_s) \cdot \Delta_7(\lambda_s)} \cdot \frac{C_s}{\lambda_s + 2}; \\ a_{2s}^2 &= \frac{\Delta_8(\lambda_s) \cdot \Delta_2(\lambda_s) - \Delta_9(\lambda_s) \cdot \Delta_3(\lambda_s)}{\Delta_9(\lambda_s) \cdot \Delta_1(\lambda_s) - \Delta_2(\lambda_s) \cdot \Delta_7(\lambda_s)} \cdot C_s; \\ a_{1s}^2 &= -\frac{a_{2s}^2 \cdot \delta_{22}(\lambda_s) + a_{3s}^2 \cdot \delta_{23}(\lambda_s) + a_{4s}^2 \cdot \delta_{24}(\lambda_s)}{\delta_{21}(\lambda_s)}; \\ a_{4s}^3 &= p_4 [a_{3s}^2 \cdot (\lambda_s + 2) + a_{4s}^2 \cdot (\lambda_s + 1 + p_1)]; \\ a_{3s}^3 &= -p_4 [a_{3s}^2 \cdot (\lambda_s + 1 - p_3) + a_{4s}^2 \cdot (\lambda_s + 1 - p_2)]; \\ a_{2s}^3 &= -p_4 [a_{1s}^2 \cdot (\lambda_s + 2) + a_{2s}^2 \cdot (\lambda_s + 1 - p_1)]; \\ a_{1s}^3 &= p_4 \left[ a_{1s}^2 \cdot (\lambda_s + 1 + p_3) + a_{2s}^2 \cdot \frac{\lambda_s (\lambda_s + 1 + p_2)}{\lambda_s + 2} \right]; \\ a_{4s}^1 &= p_4 \left[ a_{1s}^2 \cdot (\lambda_s + 2) \sin 2(\lambda_s + 1)\alpha + a_{2s}^2 \cdot (\lambda_s + 1) \sin 2\lambda_s \alpha + \right. \\ &\quad \left. + a_{3s}^2 \cdot (\lambda_s + 2) \cos 2(\lambda_s + 1)\alpha + a_{4s}^2 \cdot ((\lambda_s + 1) \cos 2\lambda_s \alpha + p_1) \right]; \\ a_{3s}^1 &= -p_4 \left[ a_{1s}^2 \cdot (\lambda_s + 1) \sin 2(\lambda_s + 2)\alpha + a_{2s}^2 \cdot ((\lambda_s + 1) \sin 2(\lambda_s + 1)\alpha + A_1(\lambda_s)) + \right. \\ &\quad \left. + a_{3s}^2 \cdot ((\lambda_s + 1) \cos 2(\lambda_s + 2)\alpha - p_3) + a_{4s}^2 \cdot ((\lambda_s + 1) \cos 2(\lambda_s + 1)\alpha - A_2(\lambda_s)) \right]; \\ a_{2s}^1 &= p_4 \left[ -a_{1s}^2 \cdot (\lambda_s + 2) \cos 2(\lambda_s + 1)\alpha - a_{2s}^2 \cdot ((\lambda_s + 1) \cos 2\lambda_s \alpha - p_1) + \right. \\ &\quad \left. + a_{3s}^2 \cdot (\lambda_s + 2) \sin 2(\lambda_s + 1)\alpha + a_{4s}^2 \cdot (\lambda_s + 1) \sin 2\lambda_s \alpha \right]; \\ a_{1s}^1 &= p_4 \left[ a_{1s}^2 \cdot ((\lambda_s + 1) \cos 2(\lambda_s + 2)\alpha + p_3) + a_{2s}^2 \cdot ((\lambda_s + 1) \cos 2(\lambda_s + 1)\alpha + A_3(\lambda_s)) - \right. \end{aligned}$$

$$-a_{3s}^2 \cdot (\lambda_s + 1) \sin 2(\lambda_s + 2)\alpha - a_{4s}^2 \cdot ((\lambda_s + 1) \sin 2(\lambda_s + 1)\alpha - A_4(\lambda_s)) \Big],$$

$$\Delta_7 = \delta_{42}\delta_{21} - (\lambda + 2)\delta_{41}\delta_{22}; \quad \Delta_8 = \delta_{44}\delta_{21} - (\lambda + 2)\delta_{41}\delta_{24}; \quad \Delta_9 = \delta_{43}\delta_{21} - \delta_{41}\delta_{23}; \quad p_4 = \frac{1-e}{1+\kappa_1};$$

$$\delta_{21} = (\lambda + 1 + p_3) \sin(\lambda + 2)\beta - (\lambda + 2) \sin \lambda\beta;$$

$$\delta_{22} = \frac{\lambda(\lambda + 1 + p_2)}{\lambda + 2} \sin(\lambda + 2)\beta - (\lambda + 1 - p_1) \sin \lambda\beta;$$

$$\delta_{23} = (\lambda + 1 - p_3) \cos(\lambda + 2)\beta - (\lambda + 2) \cos \lambda\beta;$$

$$\delta_{24} = (\lambda + 1 - p_2) \cos(\lambda + 2)\beta - (\lambda + 1 + p_1) \cos \lambda\beta;$$

$$A_1 = p_2 \sin 2\alpha - 2 \frac{\lambda + 1 + p_2}{\lambda + 2} \sin(\lambda + 2)\alpha \cos \lambda\alpha;$$

$$A_2 = p_2 \cos 2\alpha - 2 \frac{\lambda + 1 + p_2}{\lambda + 2} \sin(\lambda + 2)\alpha \sin \lambda\alpha;$$

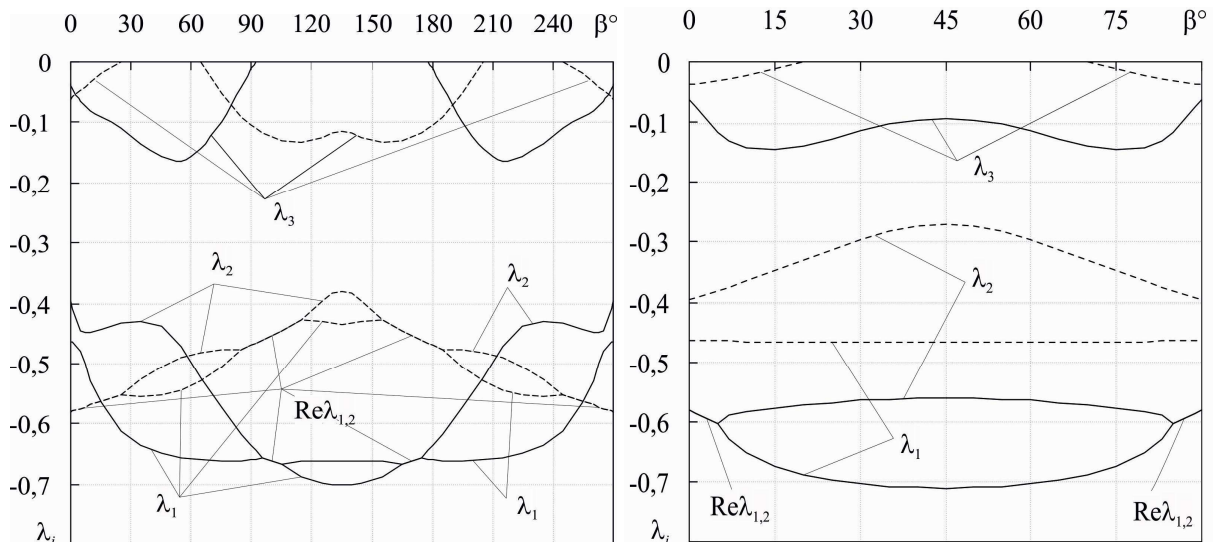
$$A_3 = p_2 \cos 2\alpha - 2 \frac{\lambda + 1 + p_2}{\lambda + 2} \cos(\lambda + 2)\alpha \cos \lambda\alpha;$$

$$A_4 = p_2 \sin 2\alpha + 2 \frac{\lambda + 1 + p_2}{\lambda + 2} \cos(\lambda + 2)\alpha \sin \lambda\alpha.$$

З урахуванням (4) формули (2) з точністю до довільних сталих  $C_s$  визначають локальне поле напружень біля вершини тріщини. У прийнятій постановці задачі ці сталі не можуть бути знайдені й вважаються заданими за умовою. Для коренів  $-1 < \operatorname{Re} \lambda_s < 0$  сталі  $C_s$  пов'язані з коефіцієнтами інтенсивності, визначення яких потребує розв'язання неоднорідної крайової задачі теорії пружності з конкретними умовами навантаження.

Зауважимо, що у частинному випадку тріщини, розташованої по бісектрисі з вершини кута зламу ( $\beta = \gamma$ ), рівняння (3) з точністю до сталого множника переходить у відповідне характеристичне рівняння з роботи [9].

**Аналіз отриманих результатів.** З (2) випливає, що поведінка напружень біля вершини тріщини носитиме сингулярний характер, якщо рівняння (3) матиме корені у смугі  $-1 < \operatorname{Re} \lambda < 0$ . Числовий аналіз для окремих значень кута зламу межі поділу  $\alpha$  та пружних параметрів з'єднаних матеріалів показав, що залежно від кута нахилу тріщини до межі  $\beta$  рівняння (3) може мати у цій смугі 2 або 3 корені (рис. 2).



a) b)

**Рисунок 2.** Залежність показника сингулярності напружень  $\lambda_s$  від кута нахилу тріщини  $\beta$  для а)  $\alpha=90^\circ$  і б)  $\alpha=270^\circ$  ( $\nu_1 = \nu_2 = 0,33$ ; пунктирні лінії –  $E_1/E_2 = 0,2$ ; суцільні лінії –  $E_1/E_2 = 5$ ).

**Figure 2.** Dependence of the stress singularity index  $\lambda_s$  on the slope angles  $\beta$  for а)  $\alpha=90^\circ$  and б)  $\alpha=270^\circ$  ( $\nu_1 = \nu_2 = 0,33$ ; dashed lines –  $E_1/E_2 = 0,2$ ; solid lines –  $E_1/E_2 = 5$ ).

Вирази (2) для напружень містять як сингулярні при  $r \rightarrow 0$  доданки з  $-1 < \text{Re } \lambda_s < 0$ , так і регулярні доданки, які відповідають  $\text{Re } \lambda_s > 0$ . Числові розрахунки показують, що з достатньою точністю локальне поле напружень в околі вершини тріщини може бути описано при врахуванні лише двох перших членів розвинень (2), що відповідають кореням  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$ . Варто відзначити, що існують також параметри композитного з'єднання, при яких для визначення локального поля напружень в околі вершини тріщини достатньо врахувати лише один доданок з  $\lambda_1$  ( $\lambda_2 \approx 0$ ) або необхідно враховувати три доданки ( $\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 < 0$ ).

Розрахунки показали, що для досліджуваного кусково-однорідного тіла існують інтервали кутів нахилу тріщини ( $\beta_{\min}; \beta_{\max}$ ), для яких рівняння (3) має у смузі  $-1 < \text{Re } \lambda < 0$  два комплексно спряжені корені. Значення ( $\beta_{\min}; \beta_{\max}$ ) для окремих параметрів з'єднання наведено у таблиці 1.

Таблиця 1

Інтервал кутів нахилу тріщини  $\beta$ , яким відповідають комплексно спряжені корені рівняння (3) у смугі  $-1 < \text{Re } \lambda < 0$  ( $\nu_1 = \nu_2 = 0,33$ ).

$\alpha$	$E_1 / E_2$	$(\beta_{\min}; \beta_{\max})$
90°	0,2	$(0^0; 29^0 40') \cup (79^0 10'; 121^0 20') \cup (148^0 40'; 190^0 50') \cup (240^0 20'; 270^0)$
	0,5	$(0^0; 18^0 05') \cup (88^0 10'; 118^0 30') \cup (151^0 30'; 181^0 50') \cup (251^0 55'; 270^0)$
	0,9	$(0^0; 11^0 40') \cup (89^0 40'; 115^0 50') \cup (154^0 10'; 180^0 20') \cup (258^0 20'; 270^0)$
	1,1	$(2^0; 9^0 50') \cup (90^0 15'; 114^0 40') \cup (155^0 20'; 179^0 45') \cup (260^0 10'; 268^0)$
	2	$(91^0 20'; 111^0 20') \cup (178^0 40'; 158^0 40')$
	5	$(94^0 25'; 106^0 45') \cup (163^0 15'; 175^0 35')$
270°	0,2÷0,9	$\emptyset$
	1,1	$(0^0; 1^0) \cup (89^0; 90^0)$
	2	$(0^0; 4^0 20') \cup (85^0 40'; 90^0)$
	5	$(0^0; 5^0 30') \cup (84^0 30'; 90^0)$

За наявності комплексно спряжених коренів  $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \lambda_{re} + i\lambda_{im}$  рівняння (3) на степеневу сингулярність напружень з показником  $\lambda_{re}$  накладаються просторові осциляції з "частотою"  $|\lambda_{im} \ln r|$ , що зростає за логарифмічним законом при наближенні до вершини. Наявність таких осциляцій зумовлює можливість фізично некоректного взаємного перетину берегів тріщини, що робить незадовільним знайдений розв'язок при відповідних кутах зламу межі поділу і кутах нахилу тріщини. Для їх усунення в аналогічній ситуації у випадку міжфазних тріщин на плоскій межі поділу припускається існування контакту берегів біля вершини [18, 19]. Проте при переважанні у зовнішньому навантаженні відривних нормальних напружень у напрямку, перпендикулярному до площини тріщини, розмір області контакту є дуже малим порівняно з деяким характерним розміром у досліджуваному тілі  $L$  (наприклад, довжиною реальної тріщини) і співрозмірним з найбільшою відстанню  $r_m < L$  від вершини, на якій осцилюючий розв'язок передбачає перетин берегів. Знайдемо таку ж відстань для тріщини, яка виходить на ламану межу поділу, а за нею оцінимо характерні розміри контактної зони, що дозволить встановити обмеження на навантаження, за яких її розміри є малими і допустимо використання отриманого розв'язку при комплексних  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$ . Подібний аналіз для міжфазної тріщини, що виходить з кутової точки межі поділу двох різних матеріалів, виконано в [20].

З (2) з урахуванням (4) та рівності  $C_1 = \overline{C_2}$ , яка випливає з вимоги, що переміщення є дійсною величиною, знаходимо головний член розвинень нормального напруження біля вершини тріщини

$$u_\theta(r, \theta) = 2 \text{Re} \left( C_1 \cdot F_4(\lambda_1, \theta) \cdot r^{\lambda_1 + 1} \right),$$

де  $F_4(\lambda_1, \theta) = -\frac{1 + \nu_i}{E_i} \cdot \frac{f_4^1(\lambda_1, \theta)}{(\lambda_1 + 1)(\lambda_1 + 2)}$ .

Подамо  $C_1$  через комплексний коефіцієнт інтенсивності напружень  $K = K_1 + iK_2$ , як це зазвичай робиться у теорії міжфазних тріщин [21]

$$C_1 = (2\pi)^{\lambda_{re}} (K_1 + iK_2) L^{-i\lambda_{im}} = (2\pi)^{\lambda_{re}} |K| L^{-i\lambda_{im}} \exp(i\psi),$$

де  $\psi = \arg K = \arctg(K_2/K_1)$  – фазовий кут, який характеризує ступінь змішування мод навантаження. Зауважимо, що через відсутність симетрії у будові кусково-однорідного тіла і викликане цим переміщенням мод навантаження біля вершини тріщини  $K_1$  і  $K_2$  не можуть бути співставлені коефіцієнтам інтенсивності напружень при розтягу і зсуві, як вони трактуються в теорії тріщин в однорідному матеріалі. У  $C_1$  вимушено введений множник  $L^{-i\lambda_{im}}$  для уникнення залежності напружень і переміщень від вибору одиниці вимірювання відстані. В результаті вираз для нормального переміщення набуває вигляду

$$u_\theta(r, \theta) = 2(2\pi)^{\lambda_{re}} \cdot r^{\lambda_{re}+1} \cdot |K| \cdot |F_4(\lambda_1, \theta)| \cdot \cos\left(\lambda_{im} \ln \frac{r}{L} + \psi + \varphi\right), \quad (5)$$

де  $\varphi = \arg F_4(\lambda_1, \theta)$ . Звідси отримуємо розкриття тріщини як відносне зміщення її берегів

$$\delta(r) = -u_\theta(r, 2\pi - \beta) + u_\theta(r, -\beta) = 2(2\pi)^{\lambda_{re}} \cdot r^{\lambda_{re}+1} \cdot |K| \cdot a \cdot \cos\left(\lambda_{im} \ln \frac{r}{L} + \psi + \xi\right), \quad (6)$$

де  $\xi = \arctg(B/A)$ ,  $a = \sqrt{A^2 + B^2}$ ,  $A = |F_4(\lambda_1, -\beta)| \cos \varphi_2 - |F_4(\lambda_1, 2\pi - \beta)| \cos \varphi_1$ ,

$B = |F_4(\lambda_1, -\beta)| \sin \varphi_2 - |F_4(\lambda_1, 2\pi - \beta)| \sin \varphi_1$ ,  $\varphi_1 = \arg F_4(\lambda_1, 2\pi - \beta)$ ,  $\varphi_2 = \arg F_4(\lambda_1, -\beta)$ .

Згідно з (6) розкриття аперіодично осилує при зміні  $r$ , нескінченну кількість раз змінюючи знак. При  $\delta < 0$  це означає фізично неможливий взаємний перетин протилежних берегів тріщини, що трактується як виникнення контакту берегів на відповідних відрізках. Оцінимо довжину всієї області контактів берегів за найбільшою з відстаней  $r_m < L$ , на якій розкриття обертається в нуль. Прирівнюючи (6) до нуля, знаходимо

$$r_m = L \cdot \exp\left(\frac{\pi/2 - \psi - \xi}{\lambda_{im}}\right) \quad (7)$$

Згідно з (7) розмір контактної зони залежить від внутрішніх параметрів матеріалів, які входять у рівняння через  $\lambda_{im}$  і  $\xi$ , та конфігурації зовнішнього навантаження, яке представлено фазовим кутом  $\psi$ . Також звідси впливає, що нехтування контактною зоною ( $r_m \ll L$ ), яке дає підстави вважати отриманий вище розв'язок прийнятним для аналізу напружено-деформованого стану біля вершини тріщини на відстанях  $r_m \ll r \ll L$  у випадку комплексно спряжених коренів  $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$

рівняння (3), можливе при виконанні нерівності  $\frac{1}{\lambda_{im}} \left(\frac{\pi}{2} - \psi - \xi\right) \ll -1$  ( $\lambda_{im} > 0$ ).

Результати числових розрахунків  $r_m/L$  для окремих параметрів задачі, наведені в таблиці 2, підтверджують існування таких умов навантаження, при яких  $r_m \ll L$  (кут  $\psi$



вибирався довільно). Порушення ж цих умов призводить до появи значної за розмірами контактної зони й вимагає розв'язання окремої задачі, що від самого початку припускає існування контакту берегів.

**Висновки.** В умовах плоскої деформації розглянуто однорідну крайову задачу теорії пружності про напружено-деформований стан в околі кутової точки ламаної межі поділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів, з якої у довільному напрямку виходить прямолінійна тріщина. Розв'язання задачі здійснено методом розділення змінних із залученням формул Вігхардта-Вільямса розвинень за власними функціями поля напружень біля вершини однорідного клина.

Таблиця 2

Оцінювання довжини зони контакту за максимальною відстанню перетину берегів  $r_m$

$$(\nu_1 = \nu_2 = 0,33)$$

$\alpha$	$E_1/E_2$	$\beta$	$\lambda_{1,2}$	$\psi$	$r_m/L$
90°	0,2	10°	-0,5692±0,0253i	150°	2,795·10 <sup>-7</sup>
		100°	-0,4536±0,0301i	170°	0,203
	0,5	10°	-0,5284±0,01i	-10°	3,858·10 <sup>-10</sup>
		100°	-0,4686±0,0129i	15°	2,297·10 <sup>-3</sup>
	0,9	10°	-0,5039±0,0008i	28°	0,451
		100°	-0,4936±0,0018i	20°	6,684·10 <sup>-15</sup>
	1,1	5°	-0,4960±0,00078i	17°30'	0,079
		100°	-0,5063±0,0015i	25°	0,809
	2	100°	-0,5576±0,0083i	180°	3,887·10 <sup>-4</sup>
	5	100°	-0,6620±0,0076i	156°	0,721
270°	1,1	0°30'	-0,5048±0,00042i	20°	1,712·10 <sup>-14</sup>
	2	4°	-0,5403±0,0047i	61°	0,07
	5	5°	-0,6027±0,0059i	95°	2,857·10 <sup>-7</sup>

Виведено характеристичне рівняння задачі для обчислення показника сингулярності напружень та здійснено числовий аналіз залежності його коренів від пружних параметрів з'єднаних матеріалів і орієнтації тріщини. Встановлено, що сингулярна поведінка напружень в околі вершини має степеневу особливість. Виявлено існування параметрів з'єднання (кутів зламу межі поділу, орієнтації тріщини, пружних характеристик матеріалів), при яких на степеневу сингулярність накладаються фізично некоректні просторові осциляції, обумовлені наявністю комплексно-спряжених коренів характеристичного рівняння. Передбачається, що такій ситуації відповідає існування області контакту берегів тріщини біля вершини. Здійснено оцінювання розмірів області можливого контакту берегів та сформульовано умову коректності отриманого розв'язку задачі.

**Conclusions.** Under the plane strain conditions the homogeneous boundary problem of the elasticity theory about the stress-strain state near the corner point of the broken interface of two different homogeneous isotropic elastic materials, from which a rectilinear crack goes out in arbitrary direction, is considered. The solution of the problem is carried out by the method of variable separation by means of the Wieghardt - Williams formulas of the expansion of the stresses near the tip of homogeneous wedge in terms of its own functions. Characteristic equation of the problem for the calculation of the stress singularity index is derived and the numerical analysis of its roots dependence on the elastic parameters of the

joined materials and crack orientation is carried out. It is shown that the singular behaviour of the stresses near the tip has a power peculiarity. The existence of the joint parameters (interface angle, crack orientation, elastic characteristic of materials), at which the physically incorrect spatial oscillations superimpose on the power peculiarity, stipulated by the presence of complex-conjugate roots of the characteristic equation, is discovered. It is foreseen that the existence of lips contact area near the crack tip to this situation is responded. The estimation of the area sizes of the possible lips contact is carried out and the condition of the correctness of the obtained solution of the problem is formulated.

#### Список використаної літератури

1. Боджи, Д. Плоская статическая задача о нагруженной трещине, заканчивающейся на границе раздела двух материалов [Текст] / Д. Боджи // Тр. Америк. общ-ва инженеров-механиков. Прикл. механика. – 1971. – Т. 38, № 4. – С. 196 – 202.
2. Erdogan, F. Bonded half planes containing an arbitrarily oriented crack / F. Erdogan, O. Aksogan // Int. J. of Solids and Structures. – 1974. – V. 10. – P. 569 – 585.
3. Ashbaugh, N. Stress solution for a crack at an arbitrary angle to an interface / N. Ashbaugh // Int. J. Fract. – 1975. – V. 11. – P. 205 – 219.
4. Choi, H.J. The problem for bonded half-planes containing a crack at an arbitrary angle to the graded interfacial zone / H.J. Choi // Int. J. of Solids and Structures. – 2001. – V. 38. – P. 6559 – 6588.
5. He, M. Y. Crack deflection at an interface between dissimilar elastic materials / M. Y. He, J. M. Hutchinson // Int. J. of Solids and Structures. – 1989. – Vol. 25. – P. 1053 – 1067.
6. Кривий, О.Ф. Тріщина, що виходить на лінію з'єднання двох різних анізотропних півплощин [Текст] / О.Ф. Кривий, К.М. Архипенко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – Т. 48, № 3. – С. 110 – 116.
7. Leguillon, D. Crack deflection by an interface – asymptotics of the residual thermal stresses / D. Leguillon, C. Lacroix, E. Martin // Int. J. of Solids and Structures. – 2001. – Vol. 38. – P. 7423 – 7445.
8. Li J. Investigation of an arbitrarily oriented crack meeting an interface between two elastic materials / J. Li, X.B. Zhang, N. Recho // Eur. J. Mech. A – Solid. – 1997. – Vol. 16, № 5. – P. 795 – 821.
9. Кипнис, Л.А. Кусочно-однородная плоскость с границей раздела в форме сторон угла и симметричным разрезом, исходящим из вершины [Текст] / Л. А. Кипнис // ПММ. – 1986. – Т. 50, Вып. 2. – С. 334 – 336.
10. Каминский, А.А. О поведении напряжений вблизи конца трещины, выходящей на границу раздела различных сред [Текст] / А.А. Каминский, М.В. Дудик, В.Н. Дякон // Теор. и прикл. механика. – 2001. – Вып. 32. – С. 103 – 108.
11. Дудик, М.В. Напряженно-деформированное состояние у вершин трещины нормального отрыва, выходящей из угловой точки границы раздела сред [Текст] / М.В. Дудик, Ю.В. Дихтяренко, Г.А. Хазин // Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех. – 2013. – Т. 18, вип. 3(19). – С. 59 – 68.
12. Zak, A.R. Crack point stress singularities at bi-material interface / A.R. Zak, M.L. Williams // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. – 1963. – V. 30, №1. – P. 142 – 143.
13. Храпков, А.А. Первая основная задача для кусочно-однородной плоскости с разрезом, перпендикулярным прямой раздела [Текст] / А.А. Храпков // ПММ. – 1968. – Т. 32, вып. 4. – С. 647 – 659.
14. Cook, T.S. Stress in bonded materials with a crack perpendicular to the interface / T.S. Cook, F. Erdogan // Int. J. Eng. Sci. – 1972. – V. 10. – P. 677 – 697.
15. Wang, T.C. Stress state in front of a crack perpendicular to bi-material interface / T.C. Wang, P. Stähle // Eng. Fract. Mech. – 1998. – V. 4. – P. 471 – 485.
16. Williams, M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension / M.L. Williams // J. Appl. Mech., – 1952 – 19, № 4, – p. 526.
17. Wieghardt, K. Über das spalten und zerreißen elastischer Körper / K. Wieghardt // Z. Math. Phys. – 1907. – B. 55. – S. 60 – 103.
18. Comninou, M. The Interface Crack / M. Comninou // Transactions of the ASME. J. of Applied Mechanics. – 1977. – V. 44, № 12. – P. 631 – 636.
19. Дундурс, Дж. Обзор и перспектива исследования межфазной трещины [Текст] / Дж. Дундурс, М. Комниноу // Механика композитных материалов. – 1979. – № 3. – С. 387 – 396.
20. Дудик, М.В. Дослідження напружено-деформованого стану біля кутової точки межі поділу матеріалів, з якої виходить міжфазна тріщина [Текст] / М.В. Дудик // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – 2014. – № 3 (75) – С. 87 – 98.
21. Rice, J.R. Elastic Fracture Mechanics Concept for Interfacial Cracks / J.R. Rice // Transactions of the ASME. J. of Applied Mechanics. – 1988. – V. 55, № 3. – P. 98 – 103.

Отримано 01.06.2015

